V БҮЛЭГ. ИНТЕГРАЛ

Энэ бүлэг сэдвийг үзсэнээр дараах мэдлэг чадварыг эзэмшинэ. Үүнд:

- e^{ax+b}, $\frac{1}{ax+b}$,sin *(ax + b)*, cos*(ax +b) ба* sec^2*(ax + b) хэлбэрийн функцийн интегралыг олох*
- *Тодорхой бус коэффицентийн аргыг ашиглан рационал функцийн интегралыг олох*
- $\frac{f'(x)}{f(x)}$ *хэлбэрийн интегралыг таних, түүний интегралыг олох*
- *Орлуулгын аргаар тодорхой болон тодорхой бус интегралыг хялбар интегралд шилжүүлэн бодох*

5.1. e^{ax+b}, $\frac{1}{ax+b}$,sin *(ax + b)*, cos*(ax +b) ба* sec^2*(ax + b)* ХЭЛБЭРИЙН ФУНКЦИЙН ИНТЕГРАЛ

- ***e^x функцийн интеграл***

Өгсөн функцийн эх функц олох дифференциалчлахын урвуу үйлдлийг интегралчлах үйлдэл гэдэг. Тухайлбал хэрэв аливаа x-ийн хувьд $F'(x) = f(x)$ нөхцөл биелж байвал $F(x)$ функцийг $f(x)$ функцийн эх функц гэх ба бүх эх функцийн олонлогийг тодорхойгүй интеграл гээд

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

гэж бичдэг.

Мөн өмнөх ангид $x^n, (ax+b)^n$ хэлбэрийн функцийн эх функц олох, интегралын чанарыг ашиглах, тодорхой интегралын утгыг олохыг судалсан. Тухайлбал $\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} + C, \quad C \in R$ томьёог мэднэ.

Жишээ 1. Интеграл бод. а) $\int (5x^4 - x)dx$; **б)** $\int_1^2 (2x-3)^4 dx$;

Бодолт.

а) $\int(5x^4 - x)dx = \int 5x^4dx - \int xdx = 5\cdot\frac{x^5}{5} - \frac{x^2}{2} + C = x^5 - \frac{x^2}{2} + C$ (C – тогтмол тоо)

б) $\int_1^2 (2x-3)^4 dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-3)^5}{5}\Big|_1^2 = \frac{1}{10}(1^5 - (-1)^5) = \frac{1}{5}$

Тухайлбал, Жишээ 1- ийн $F(x) = x^5 - \frac{x^2}{2} + C$ функц нь $f(x) = 5x^4 - x$ функцийн эх функц тул тодорхойлолт ёсоор

$$F'(x) = (x^5 - \frac{x^2}{2} + C)' = 5x^4 - x \text{ эсвэл } \int(5x^4 - x)dx = x^5 - \frac{x^2}{2} + C$$

болно. Уламжлал ба интеграл нь харилцан урвуу үйлдэл гэдгээс

$$\int F'(x)dx = F(x) + C \text{ буюу } (\int f(x)dx)' = f(x)$$

чанарууд биелнэ.

Тэгвэл $y = e^x$ функцийн эх функц олъё.
$y = e^x$ функцийн уламжлал

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

гэдгээс

$$\int e^x dx = e^x + C$$

болно. Үүнтэй адилаар уламжлалын чанар ёсоор

$$\frac{d}{dx}(c\cdot e^x) = c\cdot e^x \text{ ба } \frac{d}{dx}\left(e^{ax+b}\right) = a\cdot e^{ax+b}$$

тул

$$\int c\cdot e^x\,dx = c\cdot e^x + C \text{ ба } \int e^{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\cdot e^{ax+b} + C$$

болно.

Жишээ 2. $\int 2e^x\,dx$ интеграл бод.

Бодолт. $f(x) = 2e^x$ функцийн бүх эх функцийг олбол

$$\int 2e^x\,dx = 2e^x + C \quad \text{болно.}$$

Жишээ 3. $\int 4e^{(2-3x)}\,dx$ интеграл бод.

Бодолт. Дээрх томьёо ёсоор

$\int 4e^{(2-3x)}\,dx = 4\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot e^{(2-3x)} + C = -\frac{4}{3}\cdot e^{(2-3x)} + C$ болно.

Жишээ 4. $\int \frac{e^{2x}+1}{e^x}dx$ интеграл бод.

Бодолт. Хэрэв интегралын доорх рационал функцийн хүртвэрийг хуваарьт гишүүнчлэн хувааж гарсан функцийг интегралчилбал

$$\int \frac{e^{2x}+1}{e^x}dx = \int\left(\frac{e^{2x}}{e^x}+\frac{1}{e^x}\right)dx = \int (e^x + e^{-x})\,dx = e^x - e^{-x} + C$$

болно.

Жишээ 5. $\int_0^1 e^{3x}dx$ тодорхой интеграл бод.

Бодолт. Тодорхой интеграл бодох дүрмээр

$$\int_0^1 e^{3x}dx \;= \frac{1}{3}e^{3x}\Big|_3^1 = \frac{1}{3}(e^{3\cdot 1} - e^{3\cdot 0}) = \frac{1}{3}(e^3 - 1)$$

болно.

Жишээ 6. Хэрэв $\int_{-\alpha}^{\alpha} e^x\,dx = \frac{3}{2}$, $\alpha > 0$ бол α-ийн утгыг ол.

Бодолт. Дээрх бодлогыг бодохын тулд эхлээд тодорхой интегралыг бодсоны дараа $\frac{3}{2}$ тоотой тэнцүүлэн тэгшитгэл бодож шийдийг олно.

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} e^x\,dx = e^{\alpha} - e^{-\alpha},\quad e^{\alpha} - e^{-\alpha} = \frac{3}{2}$$

гэсэн илтгэгч тэгшитгэл болно. Энэ тэгшитгэлийг орлуулгын аргаар бодъё.

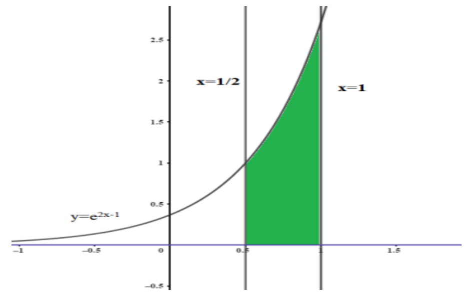
$e^{\alpha} - e^{-\alpha} = \frac{3}{2}$ тэгшитгэлийг зэргийн чанарын ашиглан $e^{\alpha} - \frac{1}{e^{\alpha}} = \frac{3}{2}$ хэлбэрт шилжүүлнэ. Хэрэв $e^{\alpha} = t$ гэж орлуулбал $t - \frac{1}{t} = \frac{3}{2}$ рационал тэгшитгэл болно.

Энэ тэгшитгэлийг ижил хуваарьтай болговол $2t^2 - 3 - 2 = 0$ гэсэн квадрат тэгшитгэлд шилжинэ. Энэ тэгшитгэлийн язгуур $t = 2$, $t = -\frac{1}{2}$ гэж гарна.

Илтгэгч функцийн утга эерэг тул $e^{\alpha} = 2$ ба эндээс $\alpha = ln2$ болно.

Жишээ 7. $y = e^{2x-1}$ функцийн график, $0x$ тэнхлэг, $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$ шугамаар хязгаарлагдсан дүрсийн талбай   ол.

Бодолт. $y = e^{2x-1}$ функцийн график, $0x$ тэнхлэг, $x = \frac{1}{2},\ x = 1$ шугамаар хязгаарлагдсан дүрсийг зурагт харуулав.



Энэ дүрсийн талбай нь $\int_{\frac{1}{2}}^{1} e^{2x-1}dx$ тодорхой интегралтай тэнцүү. Иймд

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} e^{2x-1}dx = \frac{1}{2}e^{2x-1}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{1}{2}(e^1 - e^0) \approx 0.85 \text{ (нэгж.кв) болно.}$$

Дасгал

1. x хувьсагчаар интегралчилж бод.

а) e^{4x} ; б) e^{5x-2} ; в) $7e^{-3x}$;

г) $e^{3+\frac{x}{2}}$; д) e^{9-2x}; е) $\frac{1}{3}e \cdot e^{2x-7}$;

ё) $e^{2x} + \frac{3}{e^{4x}}$; ж) $4e^x - \frac{9}{e^{2x}}$; з) $0.8e^{2x} + \frac{4}{e^{4x}}$.

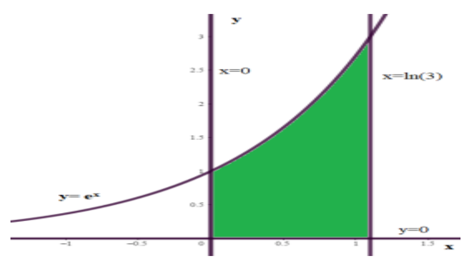
2. Тодорхой интеграл бод.

а) $\int_0^2 e^{2x}dx$; б) $\int_0^1 e^{5x-2}\,dx$; в) $\int_{-1}^{\ln 2} 6e^{-x}dx$;

г) $\int_0^1 3e^{\frac{x}{2}}dx$; д) $\int_1^3 2e^{9-4x}dx$; е) $\int_{-1}^{0} 4e^{x-5}dx$;

ё) $\int_0^{\ln 3}\left(e^{2x} + \frac{1}{e^{2x}}\right)dx$; ж) $\int_{\ln 2}^{\ln 3}\left(e^x - \frac{1}{e^x}\right)^2 dx$; з) $\int_0^1\left(e^{2x} - \frac{3}{e^{3x}}\right)dx$.

3. $y = e^x$ функцийн график, $0x$ тэнхлэг, $x = 0,\ x = \ln 3$ шугамаар хязгаарлагдсан дүрсийн талбайг ол.



- ***$y = \frac{1}{x}$ функцийн интеграл***

$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$ томьёог ашиглан $\int x^{-1}\,dx$ интегралыг бодож болохгүй. Учир нь $\int x^{-1}\,dx = \frac{1}{-1+1}x^{-1+1} + C$ болж $\frac{1}{-1+1}$ бутархайн хуваарь тэг гарч байна.

Гэвч $y = \ln x$ функцийн уламжлал $x > 0$ үед

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} \text{ тул } \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

болно. Харин $x < 0$ үед $y = \ln x$ функц тодорхойлогдохгүй боловч

$x < 0$ буюу $-x > 0$ үед $\int \frac{1}{-x} dx = \ln(-x) + C$ байх тул $x < 0$ үед

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + C$$

болно.

Хэрэв энэ хоёр үр дүнг нэгтгэн бичвэл

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

болно.

Үүнтэй адилаар $\frac{d}{dx}\ln(ax+b) = \frac{a}{ax+b}$ гэдгээс

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$$

болно.

Жишээ 1. Интеграл бод. **а)**$\int \frac{1}{7x-3} dx$; **б)**$\int \frac{2}{5-3x} dx$

Бодолт. Дээрх томьёог ашиглан интеграл бодъё.

а) $\int \frac{1}{7x-3} dx = \frac{1}{7}\ln|7x-3| + C.$

б) $\int \frac{2}{5-3x} dx = -\frac{2}{3}\ln|5-3x| + C$.

Жишээ 2. $\int_2^4 \left(\frac{2}{1-3x} + \frac{1}{x+5}\right) dx$ тодорхой интеграл бод.

Бодолт.Нийлбэрийн интеграл нэмэгдэхүүн интегралын нийлбэр болох тул

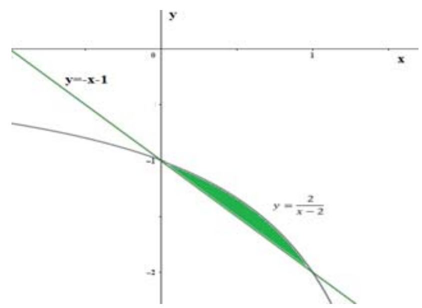
$\int_2^4 \left(\frac{2}{1-3x} + \frac{1}{x+5}\right) dx = \int_2^4 \frac{2}{1-3x} dx + \int_2^4 \frac{1}{x+5} dx = \left(2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)\ln|1-3x| + \ln|x+5|\right)\Big|_2^4 =$
$-\frac{2}{3}(\ln 11 - \ln 5) + \ln 9 - \ln 7 = -\frac{2}{3}\ln\left(\frac{11}{5}\right) + \ln\left(\frac{9}{7}\right)$ гэж гарна.

Жишээ 3. $\int\left(\frac{2x^3-3x^2+7}{x}\right)dx$ интеграл бод.

Бодолт. Интегралын доорх илэрхийлэл нь зөв биш рационал бутархай учир хүртвэрийг хуваарьт хувааж, бүхэл хэсгийг нь олж гурван функцийн нийлбэр болгоно. Интегралын чанар ашиглан нийлбэрийн интегралыг олно.

$$\int\left(\frac{2x^3-3x^2+7}{x}\right)dx=\int\left(\frac{2x^3}{x}-\frac{3x^2}{x}+\frac{7}{x}\right)dx=\int\left(2x^2-3x+\frac{7}{x}\right)dx$$
$$=\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+7\ln|x|+C$$

Жишээ 4. $y=\frac{2}{x-2},\ y=-x-1$ функцийн графикаар хязгаарлагдсан дүрсийн талбай ол.



Бодолт. $y=\frac{2}{x-2},\ y=-x-1$ функцийн графикаар хязгаарлагдсан дүрсийг зурагт харуулав.

Хоёр функцийн графикийн огтлолцлын цэгийн абсциссыг олъё.

$\frac{2}{x-2}=-x-1 \Leftrightarrow x=0$ буюу $x=1$ болно.

Иймд дүрсийн талбай

$$\int_0^1\left(\frac{2}{x-2}+x+1\right)dx=\left(2\ln|x-2|+\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_0^1=\frac{3}{2}-2\ln 2 \text{ нэгж.кв}$$

Жишээ 5. Уламжлал нь $\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2x+1}$ байх функц өгөв.

а) y функцийг ол.
б) График нь $(1,0)$ цэгийг дайрах y функцийг ол.

Бодолт. **а)** Уламжлалын урвуу үйлдэл болох интегралыг нь бодвол

$$y=\int\frac{3}{2x+1}dx=\frac{3}{2}\ln|2x+1|+C \text{ (Энд } C \text{ – тогтмол тоо)}$$

б) Өмнө олсон y функцийн томьёонд $x=0,\ y=1$ орлуулж C –ийн утгыг олно.

$$0=\frac{3}{2}\ln|2\cdot 1+1|+C,\quad C=-\frac{3}{2}\ln 3$$

Иймд

$$y=\frac{3}{2}\ln|2x+1|-\frac{3}{2}\ln 3=\frac{3}{2}\ln\frac{|2x+1|}{3} \text{ гэж гарна.}$$

Дасгал

4. Интеграл бод.

а) $\int \frac{1}{2x} dx$; б) $\int \frac{2}{x} dx$; в) $\int \frac{3}{4x} dx$;

г) $\int \frac{2}{3x-2} dx$; д) $\int \frac{1}{2x+1} dx$; е) $\int \frac{3}{5-2x} dx$;

ё) $\int \left(\frac{1}{3x-2} - \frac{2}{5-4x}\right) dx$; ж) $\int \left(\frac{1}{5x^5} - \frac{2}{1-x}\right) dx$; з) $\int \left(\frac{4}{(x-3)^3} + \frac{3}{2x+1}\right) dx$.

5. Тодорхой интеграл бод.

а) $\int_1^2 \frac{1}{x+3} dx$; б) $\int_1^2 \frac{1}{2x-1} dx$; в) $\int_0^1 \frac{1}{2-x} dx$;

г) $\int_4^5 \frac{2}{x-3} dx$; д) $\int_2^5 \frac{dx}{2x-3}$; е) $\int_1^e \frac{x^3+x}{x^2} dx$;

ё) $\int_1^2 \frac{e}{ex-7} dx$; ж) $\int_{-1}^0 \left(2 + \frac{1}{x-1}\right) dx$; з) $\int_1^e \frac{x^3-x}{ex^2} dx$.

6. Интеграл бод.

а) $\int ((x-1)^2 + 3e^{1-2x})\, dx$; б) $\int \frac{e^{2x}+e^x-7}{e^x} dx$; в) $\int \left(\frac{2}{x} + 3e^x\right) dx$;

г) $\int \frac{4x^3-7x+5}{4x^2} dx$; д) $\int \frac{1-2x}{2x+1} dx$; е) $\int \left(5\sqrt{e^{4x-1}} - \frac{2}{3x-5}\right) dx$;

ё) $\int \left(e^{2x} + \frac{1}{3x+1}\right) dx$; ж) $\int \left(\sqrt{e^{3x}} - \frac{2}{1-x}\right) dx$; з) $\int e^{2x}(e^{2x} - 2e^{-2x})\, dx$.

7. $y = \frac{1}{x}$ функцийн график, $y = 0$ болон дараах шугамаар хязгаарлагдсан дүрсийн талбай ол.

а) $x = 3,\ x = 6$; б) $x = 4,\ x = 8$;

в) $x = \frac{1}{2},\ x = 1$; г) $x = a,\ x = 2a,\ a > 0$.

8. $\int_6^{16} \frac{6}{2x-7} = \ln 125$ болохыг батал.

9. Дараах шугамаар хязгаарлагдсан дүрсийн талбай ол.

а) $y = \frac{1}{x+2},\ y = 0,\ x = -1,\ x = 0$; б) $= \frac{1}{2x-1},\ y = 0,\ x = 2,\ x = 5$;

в) $y = \frac{1}{-x-1},\ y = 0,\ x = -3,\ x = -2$; г) $y = 2 + \frac{1}{x-1},\ y = 0, x = 2,\ x = 6$.

10. $y = \frac{3}{2x-1}$ муруй, $x = 1,\ x = 4$ шулуун ба O_xтэнхлэгээр хязгаарлагдсан дүрс зурж, талбайг 0,001нарийвчлалтай тоймлон ол.

11. $\frac{dy}{dx} = \frac{8}{4x-3}$ байх y функцийн график $(1,2)$ цэгийг дайрна. y функцийг ол.

- ***Тригонометрийн функцийн интеграл***

Тригонометрийн функцийн уламжлал мэдэх тул интегралыг нь олж болно. Тухайлбал $y = \sin x$ функцийн уламжлал $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ гэдгээс

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

ба $y = \cos x$ функцийн уламжлал $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$ гэдгээс

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

болно. Мөн $y = \operatorname{tg} x$ функцийн уламжлал $\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$ гэдгээс

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} \int \sec^2 x\, dx = \operatorname{tg} x + C \text{ болно.}$$

Үүнтэй адилаар уламжлалын чанарыг ашиглавал $\frac{d}{dx}(k \cdot \sin x) = k \cdot \cos x$ ба

$\frac{d}{dx}(\sin(ax+b)) = a \cdot \cos(ax+b)$ болно. Иймд дифференциалчлахын урвуу үйлдэл интегралчлах үйлдэл тул $\int f(ax+b)\, dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$ томьёо ёсоор

$$\int k \cdot \cos x\, dx = k \cdot \sin x + C \text{ ба } \int \cos\ (ax+b) dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$$

болно.

Жишээ 1.а) $\int 3\sec^2 x dx$; **б)** $\int \sin 4t dt$ функцийн интеграл бод.

Бодолт. Дээрх томьёо ёсоор

а) $\int 3\sec^2 x dx = 3 \operatorname{tg} x + C$

б)$\int \sin 4t dt = -\frac{1}{4}\cos 4t + C$ гэж гарна.

Жишээ 2. $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2\left(\frac{2x}{9}\right)} dx$ тодорхой интегралыг бод.

Бодолт. $\int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)} = \frac{1}{a}\operatorname{tg}(ax+b) + C$ ашиглая.

$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2\left(\frac{2x}{9}\right)} dx = \left(\frac{9}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{2x}{9}\right)\right)\Big|_0^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{9}{2}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{2\cdot\frac{3\pi}{2}}{9}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{2\cdot 0}{9}\right)\right) = \frac{9}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \frac{9}{2}\sqrt{3}$ гэж гарна.

Жишээ 3. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx$ интеграл бод.

Бодолт. $y = \operatorname{ctg} x$ функцийн уламжлал $\frac{d}{dx}(\operatorname{ctg} x) = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$ гэдгээс $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = \int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\operatorname{ctg} x + C$ болно.

Жишээ 4. $\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{2\pi}{3} - 3x\right)dx$ тодорхой интегралыг бод.

Бодолт. $\int \cos\ (ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$ томьёо ёсоор

$\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{2\pi}{3} - 3x\right)dx = \left[-\frac{1}{3}\sin\left(\frac{2\pi}{3} - 3x\right)\right]\begin{matrix}\pi\\0\end{matrix} = -\frac{1}{3}\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3} - 3\cdot\pi\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{3} - 3\cdot 0\right)\right) = -\frac{1}{3}\left(\sin\left(-\frac{7\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ болно.

Жишээ 5. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{cosec}^2(3x)\,dx$ тодорхой интеграл бод.

Бодолт. Жишээ 3-ын бодолтыг ашиглан интегралчилбал

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{cosec}^2(3x)\,dx = \left[-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}(3x)\right]\begin{matrix}\frac{\pi}{2}\\\frac{\pi}{6}\end{matrix} = -\frac{1}{3}\left(\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{2} - \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}\right) = 0$ болно.

Жишээ 6. Хэрэв $F'(x) = 2\sin 5x + 3\cos\frac{x}{2}$ функц өгсөн бол $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$ нөхцөл хангах $F(x)$ функц ол.

Бодолт. Интегралчлах ба дифференциалчлах үйлдэл харилцан урвуу үйлдэл тул $\int F'(x)dx = F(x) + C$ болох ба энэ томьёог ашиглаж $F(x)$ функцийг олно. Иймд

$$F(x) = \int \left(2\sin 5x + 3\cos\frac{x}{2}\right)dx = -\frac{2}{5}\cos 5x + 3\cdot 2\sin\frac{x}{2} + C$$

болно. Одоо өгсөн нөхцөл ашиглая.

$$F\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{2}{5}\cos\left(5\cdot\frac{\pi}{3}\right) + 3\cdot 2\sin\frac{\frac{\pi}{3}}{2} + C = 0$$

Эндээс $C = \frac{14}{5}$ болно. Иймд өгсөн нөхцөл хангах

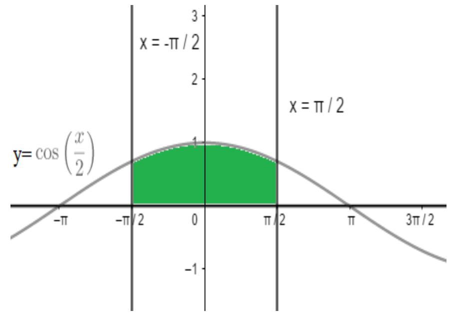
$$F(x) = -\frac{2}{5}\cos 5x + 6\sin\frac{x}{2} + \frac{14}{5}$$

эх функц оллоо.

Жишээ 7. $y = \cos\frac{x}{2}$ функцийн график, Ox тэнхлэг, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$ шугамаар хязгаарлагдсан дүрсийн талбай ол.

Бодолт. $y=\cos\frac{x}{2}$ функцийн график, $0x$ тэнхлэг, $x=-\frac{\pi}{2},\ x=\frac{\pi}{2}$ шугамаар хязгаарлагдсан дүрсийг зурагт харуулав.

Энэ дүрсийн талбай нь $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\frac{x}{2}\,dx$ тодорхой интегралтай тэнцүү. Зургаас харахад $y=\cos\frac{x}{2}$ функц нь тэгш функц тул график нь $0y$ тэнхлэгийн хувьд тэгш хэмтэй байна. Иймд энэ дүрсийн талбайг $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ завсар дээр олж хоёр дахин авахад анхны олох дүрсийн талбай гарна.



$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\frac{x}{2}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\frac{x}{2}dx=2\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}\cdot\sin\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=4\sin\frac{\pi}{4}=2\sqrt{2}$ (нэгж кв) болно.

Дасгал

12. Интеграл бод.

а) $\int\sin 7x dx$; б) $\int 3\cos 2x\, dx$; в) $\int\frac{3}{4\cos^2 5x}dx$;

г) $\int 4\sec^2 3x dx$; д) $\int 3\sin(1-2x)\,dx$; е) $\int 5\cos\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)dx$;

ё) $\int(\cos 3x+10\sin 5x)\,dx$; ж) $\int(4\sin 2x-3\cos 2x)dx$; з) $\int\frac{1}{2}\operatorname{cosec}^2(2x)dx$.

13. Тодорхой интеграл бод.

а) $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin 3x dx$; б) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)dx$; в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)dx$;

г) $\int_0^{\frac{\pi}{8}}\sec^2 2x dx$; д) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\cos^2 2x}$; е) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx$;

ё) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\operatorname{cosec}^2\frac{x}{2}dx$; ж) $\int_0^{\pi}(4-3\cos 2x)\,dx$; з) $\int_0^{\frac{\pi}{6}}2\sec^2\left(\frac{3x}{2}\right)dx$.

14. Интеграл бод.

а) $\int\left(\sin 3x+3\cos x-\sin\frac{x}{2}\right)dx$; б) $\left(\int\frac{e^{2x}}{3}-\sec^2 2x\right)dx$;

в) $\int\left(\frac{2}{x}+3e^x-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)dx$; г) $\int\left(\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+e^{1-2x}\right)dx$;

д) $\int\left(\frac{1}{\sin^2\left(\frac{x}{3}\right)}+\frac{5}{2x-1}\right)dx$; е) $\int\left(5\cos\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{2}{3x-5}\right)dx$.

15. а) Хэрэв $F'(x) = \sin 2x + 3x^2$ функц өгсөн бол $F(0) = 2$ нөхцөлийг хангах $F(x)$ функц ол.

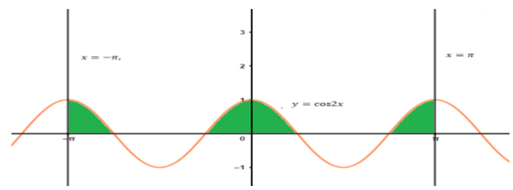
б) Хэрэв $F'(x) = 1 + x + \cos 2x$ функц өгсөн бол $F(0) = 1$ нөхцөлийг хангах $F(x)$ функц ол.

16. Хэрэв $f(x) = 3 - \cos(2 - x)$ функцийн график $M(2; 6)$ цэгийг дайрах бол $f(x)$-ийн эх функцийг ол.

17. Тэгшитгэл бод.

а) $\int_2^x \frac{dt}{t} = 2;$ б) $\int_0^x e^{2t} dt = 1;$ в) $\int_0^x 2\cos 3t dt = 0, \ \ x \in]0, \pi].$

18. $y = \cos 2x$ функцийн график, Ох тэнхлэг, $x = -\frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{4}$ шугамаар хязгаарлагдсан дүрсийн талбай ол. /Зураг/



19. $y = \sin x$ функцийн графикийн $[0; \pi]$ завсар дээрх дүрсийн талбайг ол.
20. $y = \cos 2x$ функцийн график, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{4}$ шулуун, O_xтэнхлэгээр хязгаарлагдсан дүрс зурж, талбайг 0,001нарийвчлалтай тоймлон ол.

5.2. РАЦИОНАЛ ФУНКЦИЙН ИНТЕГРАЛ

Бид рационал функцийг тодорхой бус коэффицентийн аргаар хялбар рационал функцийн нийлбэр болгон задлахыг үзсэн.

Мөн $\frac{1}{ax+b}, \frac{1}{(ax+b)^n}$ хялбар рационал функцийн эх функцийг олж чадна. Тухайлбал

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax + b| + C \text{ ба } \int \frac{dx}{(ax+b)^n} = \frac{1}{a(1-n)} (ax + b)^{1-n} + C,$$

болно. Энд a, b, n, C – тогтмол тоо байна.

Тодорхой бус коэффицентийн арга ашиглан рационал функцийн интеграл бодохыг жишээгээр харуулья.

Жишээ 1. $\int \frac{x}{(x-1)(x+2)} dx$ интеграл бод.

Бодолт. Тодорхой бус коэффицентийн аргыг ашиглан $\frac{x}{(x-1)(x+2)}$ рационал бутархайг хоёр хялбар рационал функцийн нийлбэр болгоно.

$$\frac{x}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x(A+B)+2A-B}{(x-1)(x+2)}$$

Эндээс $A = \frac{1}{3}$, $B = \frac{2}{3}$ гэж гарна.

Иймд өгсөн интеграл

$\int \frac{x}{(x-1)(x+2)} dx = \int \frac{1}{3(x-1)} dx + \int \frac{2}{3(x+2)} dx = \frac{1}{3}\ln|x-1| + \frac{2}{3}\ln|x+2| + C,$ гэж гарна.

Жишээ 2. $\int \frac{x-1}{x^2-x-6} dx$ интеграл бод.

Бодолт. Хэрэв бутархайн хуваарийг үржигдэхүүн болгон задалбал

$x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$ болно.

Иймд хэрэв $\frac{x-1}{(x+2)(x-3)}$ рационал функцийг тодорхой бус коэффицентийн аргаар хялбар рационал функцийн нийлбэр болгон задалбал

$$\frac{x-1}{(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3} = \frac{x(A+B)-3A+2B}{(x+2)(x-3)}$$

болно. Эндээс $B = \frac{2}{5}$ $A = \frac{3}{5}$ гэж гарах тул

$$\frac{x-1}{(x+2)(x-3)} = \frac{\frac{3}{5}}{x+2} + \frac{\frac{2}{5}}{x-3} = \frac{3}{5(x+2)} + \frac{2}{5(x-3)}$$

хоёр хялбар рационал функцийн нийлбэр болж байна.

Өгсөн интеграл

$$\int \left(\frac{x-1}{x^2-x-6}\right) dx = \int \left(\frac{\frac{3}{5}}{x+2} + \frac{\frac{2}{5}}{x-3}\right) dx = \frac{3}{5}\ln|x+2| + \frac{2}{5}\ln|x-3| + C$$

гэж гарна.

Жишээ 3. $\int \frac{9\mathrm{x}+2}{(x+1)^2} dx$ интегралыг бод.

Бодолт. Хуваарь нь $(x+1)^2$ тул

$$\frac{9\mathrm{x}+2}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2}$$

гэж хялбар рационал функцийн нийлбэр болгон задална. Эндээс

$A = 9, B = -7$ гэж гарна. Иймд

$$\frac{9\mathrm{x} + 2}{(x+1)^2} = \frac{9}{x+1} + \frac{-7}{(x+1)^2} = \frac{9}{x+1} - \frac{7}{(x+1)^2}$$

болно. Өгсөн интеграл

$\int \frac{9\mathrm{x}+2}{(x+1)^2}\, dx = \int \left(\frac{9}{x+1} - \frac{7}{(x+1)^2}\right) dx = \int \frac{9}{(x+1)} dx - \int \frac{7}{(x+1)^2} dx = 9\ln|x+1| - \frac{7(x+1)^{-2+1}}{-1} =$
$9\ln|x+1| + \frac{7}{x+1} + C$

Жишээ 4. $\int \left(\frac{3x^2+19x-32}{(x-1)(x-2)(x+4)}\right) dx$ интегралыг бод.

Бодолт. Интегралын доорх рационал функцийг тодорхой бус коэффицентийн аргаар хялбар рационал функцийн нийлбэр болгон задалъя.

$$\frac{3x^2 + 19x - 32}{(x-1)(x-2)(x+4)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x+4)}$$

$$\frac{3x^2 + 19x - 32}{(x-1)(x-2)(x+4)} = \frac{A(x-2)(x+4) + B(x-1)(x+4) + C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x+4)}$$

Иймд $3x^2 + 19x - 32 = A(x-2)(x+4) + B(x-1)(x+4) + C(x-1)(x-2)$

адилтгал биелнэ. Эндээс $A = 2, B = 3, C = -2$ гэж гарах тул

$$\frac{3x^2 + 19x - 32}{(x-1)(x-2)(x+4)} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-2} + \frac{-2}{x+4}$$

болно. Өгсөн интеграл

$$\int \left(\frac{3x^2 + 19x - 32}{(x-1)(x-2)(x+4)}\right) dx = \int \left(\frac{2}{(x-1)} + \frac{3}{(x-2)} - \frac{2}{(x+4)}\right) dx =$$

$$= \int \frac{2}{(x-1)} dx + \int \frac{3}{(x-2)} dx - \int \frac{2}{(x+4)} dx =$$

$$= 2\ln|x-1| + 3\ln|x-2| - 2\ln|x+4| + C$$

Жишээ 5. $\int \frac{x+2}{(x-2)(x+1)^2} dx$ интегралыг бод.

Бодолт. $(x-2)(x+1)^2$ хэлбэрийн хуваарьтай рационал функцийг тодорхой бус коэффицентийн аргаар хялбар рационал функцийн нийлбэрт задлахыг үзсэн. Иймд

$$\frac{x+2}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

болно. Эндээс $A = \frac{4}{9}, B = -\frac{4}{9}, C = -\frac{1}{3}$ гэж гарна. Өгсөн функцээ

$$\frac{x+2}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{4}{9(x-2)} - \frac{4}{9(x+1)} - \frac{1}{3(x+1)^2}$$

гэсэн гурван хялбар рационал функцийн нийлбэр болгон задаллаа.

Одоо өгсөн интеграл

$$\int \frac{x+2}{(x-2)(x+1)^2} dx = \int \left(\frac{4}{9(x-2)} - \frac{4}{9(x+1)} - \frac{1}{3(x+1)^2}\right) dx = \frac{4}{9}\ln|x-2|$$
$$-\frac{4}{9}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\frac{(x+1)^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{4}{9}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + \frac{1}{3(x+1)} + C$$

болно.

Жишээ 6. $\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+x-6} dx$ тодорхой интеграл бод.

Бодолт. Интегралын доорх функц зөв биш рационал бутархай тул бүхэл хэсгийг нь ялгаж, олон гишүүнт ба зөв рационал бутархайн нийлбэр болгоё.

$$\frac{x^2}{x^2+x-6} = \frac{x^2+x-6-x+6}{x^2+x-6} = 1 - \frac{x-6}{(x-2)(x+3)}$$

$\frac{x-6}{(x-2)(x+3)}$ нь зөв рационал бутархай тул тодорхой бус коэффицентийн аргаар задалъя.

$$\frac{x-6}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+3)}$$

Эндээс $B = \frac{9}{5}$, $A = -\frac{4}{5}$ гэж гарна.

Иймд өгсөн интеграл

$\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+x-6} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x-6}{(x-2)(x+3)}\right) dx = x - \int_0^1 \left(\frac{-\frac{4}{5}}{x-2} + \frac{\frac{9}{5}}{x+3}\right) dx = 1 - \left(-\frac{4}{5}\ln|x-2| + \frac{9}{5}\ln|x+3|\right)\Big|_0^1 = 1 - \frac{22}{5}\ln 2 + \frac{9}{5}\ln 3$ болно.

Жишээ 7. Хэрэв $f'(x) = \frac{1}{x^2-5x+6}$, $f(4) = -\ln 2$ бол $f(x)$ функцийг ол.

Бодолт. $f'(x) = \frac{1}{x^2-5x+6}$ гэж өгсөн тул

$f(x) = \int \frac{1}{x^2-5x+6} dx = \int \left(\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-2}\right) dx = \ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C$ гарах ба өгсөн нөхцөлийг тооцвол $f(4) = \ln\left|\frac{4-3}{4-2}\right| + C = -\ln 2$ болно. Эндээс $C = 0$ гэж гарна. Иймд $f(x) = \ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|$.

Дасгал

21. Дараах рационал функцийн интеграл бод.

а) $\int \frac{2}{x(x+2)} dx$; б) $\int \frac{2x}{(x-1)(x+2)} dx$; в) $\int \frac{x-3}{(x-1)(x+2)} dx$;

г) $\int \frac{1-x}{(x-2)(x-3)} dx$; д) $\int \frac{x+3}{(x-3)(x+2)} dx$; е)$\int \frac{x-1}{x^2+2x} dx$;

ё) $\int \frac{3x}{x^2-4} dx$; ж) $\int \frac{2}{x^2-1} dx$; з) $\int \frac{5}{(x^2-4)x} dx$;

и) $\int \frac{2x+3}{(x-1)^2} dx$; к) $\int \frac{x}{(x-3)^2} dx$; л)$\int \frac{-3x^2+x+19}{(x-4)(x+1)(x-2)} dx$.

22. Интеграл ол.

а) $\int \frac{x}{x^2-4x-5} dx$; б) $\int \frac{2}{x^2+x-6} dx$; в) $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+2} dx$;

г) $\int \frac{x-1}{x^2-5x+6} dx$; д) $\int \frac{x+3}{2x^2-3x+1} dx$; е) $\int \frac{2x-3}{x^3-x^2} dx$.

23. Интеграл доорх бутархайн бүхэл хэсгийг ялган интеграл бод.

а) $\int \frac{x}{x+5} dx$; б) $\int \frac{x}{2x+3} dx$; в) $\int \frac{2+x}{2-x} dx$;

г) $\int \frac{3x-1}{x-2} dx$; д) $\int \frac{x+1}{2x+1} dx$; е) $\int \frac{(1+x)^2}{x^2+1} dx$;

ё) $\int \frac{2x^2-11}{x^2+x-6} dx$; ж) $\int \frac{4x^3}{x^2-1} dx$; з) $\int \frac{x^2}{x^2-4} dx$.

24. Тодорхой интеграл бод.

а) $\int_1^2 \frac{x}{(2x-1)(x+1)} dx$; б) $\int_0^1 \frac{2x}{(x-3)(x+1)} dx$; в) $\int_3^4 \frac{x}{x^2-4} dx$;

г) $\int_1^2 \frac{x+1}{x(x+4)} dx$; д) $\int_0^1 \frac{x}{x^2-4x-5} dx$; е) $\int_{-1}^1 \frac{5}{x^2+x-6} dx$;

ё) $\int_0^1 \frac{2x^2-11}{x^2+x-6} dx$; ж) $\int_{-1}^1 \frac{4}{x^2-4} dx$; з) $\int_0^1 \frac{4x}{x^2-5x+6} dx$.

25. Хэрэв $f'(x) = \frac{5}{x^2-x-6}$, $f(2) = -\ln 4$ бол $f(x)$ функцийг ол.

26. $y = \frac{2}{x^2-1}$ функцийн график, $0x$ тэнхлэг $x = 0,\ x = 3$ шугамаар хязгаарлагдсан дүрсийн талбай ол.

Бүлгийн нэмэлт даалгавар:

1. x хувьсагчаар интегралчилж бод.

а) $5e^x - 2\sqrt{e^{4x}}$; б) $4e^{8x-2} + \frac{5}{2x^3}$; в) $9e^{-3x} + 7x^6$;

г) $e^{3+\frac{x}{2}} + \frac{2}{3x-1}$; д) $e^{9-2x} - \frac{5}{2-10x}$; е) $\frac{3}{1-2x} + 4e \cdot e^{2x-7}$;

ё) $e^{2x} + \frac{2e}{e^{4x}} - \frac{3}{2x}$; ж) $\frac{e^{3x}-e^x-2}{e^x} + 2$; з) $0.8\sqrt{e^{2x-1}} - \frac{6}{3x-5}$;

и) $-\sin(2x-1) + 4\cos\frac{2x}{3}$; к) $\frac{e^{2x-3}}{5} + \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$; л) $\frac{2}{x-1} + 3e^{6x} - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

2. Интеграл бод.

а) $\int\left(\frac{2}{x} - e^{-x}\right)dx$; б) $\int \sin\left(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{2}\right)dx$; в)$\int\left(3e^{-2x} + \frac{3}{3x-2}\right)dx$;

г) $\int \frac{-3}{\sin^2(\pi-3x)}dx$; д) $\int \frac{1+2x}{2x-1}dx$; е) $\int\left(\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 7e^{1-2x}\right)dx$;

ё) $\int\left(\frac{x^3-4x^2+3}{4x^2}\right)dx$; ж) $\int((2x-1)^3 - 4e^{1-2x})\,dx$; з) $\int 2e^{3x}(e^{3x} - 3e^{-3x})\,dx$;

и) $\int\left((1-3x)^2 + \frac{6}{1-3x}\right)dx$; з)$\int \frac{2e^{2x}-e^x-1}{e^x}dx$; к) $\int\left(\sqrt{e^{-3x}} - \sec^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)dx$.

3. Тодорхой интеграл бод.

а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos x\,dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx$; в) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)dx$;

г) $\int_1^2\left(\frac{2}{x} - e^{-x}\right)dx$; д) $\int_0^{\pi} \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right)dx$; е) $\int_2^4 \frac{9dx}{3x-4}$;

ё) $\int_1^e \frac{x^3+x-1}{x^2}dx$; ж) $\int_0^1 \frac{1+3x}{3x-1}dx$; з) $\int_0^1 (\frac{(1+4x)^3}{3} + \cos\pi x)\,dx$.

4. Дараах рационал функцийн бүх эх функцийг ол.

а) $\frac{4}{(x+2)(x-2)}$; б) $\frac{6}{(x-2)(x+1)}$; в) $\frac{x}{(x-3)(2x+1)}$;

г) $\frac{8}{(2x-1)(x+2)}$; д) $\frac{7x-23}{(x-2)(x-5)}$; е) $\frac{29-3x}{(x-3)(x+2)}$;

ё) $\frac{4x+12}{x^2-3x}$; ж) $\frac{4x+12}{4x^2-9}$; з) $\frac{-x+13}{x^2-x-6}$;

и) $\frac{-2x+23}{x^2-3x-4}$; й) $\frac{10x}{2x^2-3x+1}$; к) $\frac{x+11}{2x^2-x-10}$.

5. $\int_0^1 \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ тодорхой интеграл бод.

а) $P(x) = x^2 - 5x + 2 \quad Q(x) = x - 3$;

б) $P(x) = x^2 + 2x - 6 \quad Q(x) = x + 1$;

в) $P(x) = 2x^2 + 3x - 1 \quad Q(x) = x - 2$;

г) $P(x) = 2x^2 + 3x + 1 \quad Q(x) = 2x - 1$;

д) $P(x) = 6x^2 - x - 2 \quad Q(x) = 3x + 1$;

е) $P(x) = x^4 - x^3 + 3x - 2 \quad Q(x) = x - 3$.

6. а) Хэрэв $F'(x) = 4e^{4x-2} + \frac{5}{x}$ функц бол $F(1) = 0$ нөхцөл хангах $F(x)$ функц ол.

б) Хэрэв $F'(x) = \frac{1}{2x-1} + \cos 2x$ функц бол $F(0) = 1$ нөхцөл хангах $F(x)$ функц ол.

7. Тэгшитгэл бод.

а) $\int_2^x \frac{dt}{2t+1} = \ln 5$; б) $\int_0^x e^{1+2t}dt = 0$; в) $\int_0^x 4\cos 2t dt = 1,\ x \in]0, \pi]$.

8. Дараах шугамаар хязгаарлагдсан дүрсийн талбай ол.

а) $y = \frac{1}{x+1},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 1$; б) $y = \frac{1}{1-2x},\ y = 0,\ x = 1,\ x = 2$;

в) $y = e^{2x},\ y = 0,\ x = 0,\ x = \ln 2$; г) $y = 2 + e^x,\ y = 0, x = 0,\ x = 1$;

д) $y = \sin x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = \pi$; е) $y = \cos x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = \frac{\pi}{2}$;

ё) $y = 2\cos x,\ y = 1,\ x = -\frac{\pi}{3},\ x = \frac{\pi}{3}$; ж) $y = \sin x,\ y = \frac{1}{2},\ x = \frac{\pi}{6},\ x = \frac{5\pi}{6}$.

9. $y = \cos x$ функцийн графикийн $[0; \pi]$завсар дээрх дүрсийн талбай ол.

10. а) $y = e^{2x}$ функцийн график, $x = \frac{1}{2},\ x = 1$ шулуун, O_xтэнхлэгээр хязгаарлагдсан дүрс зурж, талбайг 0,001нарийвчлалтай тоймлон ол.

б) $y = \frac{1}{2x+1}$ функцийн график, $x = 0,\ x = 1$ шулуун, O_xтэнхлэгээр хязгаарлагдсан дүрс зурж, талбайг 0,001нарийвчлалтай тоймлон ол.

в) $y = \sin 3x$ функцийн график, $x = \frac{\pi}{6},\ x = \frac{\pi}{3}$ шулуун, O_xтэнхлэгээр хязгаарлагдсан дүрс зурж, талбайг 0,001нарийвчлалтай тоймлон ол.

5.5 $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ хэлбэрийн интеграл бодох

$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ (1) байдгийг бид мэднэ. Энд хэрэв $x > 0$ байвал $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$ гэж бичиж болно.

Энэ (1) томьёог хэрэглэх хэдэн хялбар жишээ авч үзье.

Жишээ 1. $\int \frac{1}{2x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} \ln|x| + C$. (Тогтмол тоон үржигдэхүүнийг интегралын өмнө гаргаж болно)

Жишээ 2. $\int \frac{2}{3x+1} dx = 2\int \frac{1}{3x+1} dx = 2 \cdot \frac{1}{3} \ln|3x+1| + C = \frac{2}{3} \ln|3x+1| + C$. (Хэрэв $\int f(x) dx = F(x) + C$ бол $\int f(kx+b) dx = \frac{1}{k} F(kx+b) + C$ байна.)

Жишээ 3.

$$\int \frac{3x}{x+1} dx = \int \frac{3x+3-3}{x+1} dx = \int \frac{3(x+1)-3}{x+1} dx = \int \left(3 - \frac{3}{x+1}\right) dx = 3x - 3\ln|x+1| + C$$

Бодлого. $\int \frac{2x}{x^2+1} dx$ тодорхойгүй интегралыг бод.

Энэ бодлогыг өмнө үзсэн рационал бутархайг интегралчлах аргаар бодож болохгүй. Рационал бутархайг интегралчлахад хэрэв интегралын дорх функц нь $\frac{f'(x)}{f(x)}$ хэлбэртэй байвал $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ томьёо руу шилжүүлэн бодох боломжийг дараах теорем олгоно.

Теорем. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$ (2) байна.

Баталгаа. Хэрвээ $y = \ln f(x)$ функц өгсөн байвал давхар функцийн уламжлал олох томьёо ёсоор $y' = (\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$ гэж гарна. Интеграл нь уламжлалын урвуу үйлдэл тул $f(x) > 0$ үед $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) + C$, $f(x) < 0$ үед $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(-f(x)) + C$ гэж гарна.

Энэ хоёр тохиолдлыг нэгтгэн $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$ гэж бичиж болно.

Тэгвэл дээрх бодлогын хувьд $(x^2+1)' = 2x$ байгаа тул терем ёсоор

$\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \ln\left(x^2+1\right)+C$ болно. Энд $x^2+1>0$ тул $\left|x^2+1\right| = x^2+1$ юм.

Функцийн дифференциал

Бид функцийн уламжлалыг $y' = \frac{dy}{dx}$ гэж тэмдэглэдгийг мэднэ. Үүнийг $dy = y'dx$ гэж өөрчлөн бичиж болдог. Үүнийг интеграл бодох, дифференциал тэгшитгэл бодоход олонтаа ашиглах болно. (Яагаад ингэж бичиж болдгийн нарийн учрыг сонгон суралцах хөтөлбөрт үзэх болно.) $y = f\left(x\right)$ функцийн хувьд энэ бичиглэл - $df\left(x\right) = f'\left(x\right)dx$ хэлбэртэй болно. $df\left(x\right)$-ийг $f\left(x\right)$ ***функцийн дифференциал*** гэх бөгөөд энэ томьёоноос харвал функцийн дифференциал нь функцийн уламжлалыг dx -ээр үржүүлсэнтэй тэнцүү байдаг ажээ. Дээрх теоремийн хувьд функцийн дифференциалын тодорхойлолт ёсоор $f'\left(x\right)dx = df\left(x\right)$ байх тул $\int \frac{f'(x)}{f\left(x\right)}dx = \int \frac{1}{f\left(x\right)}df\left(x\right) = \ln\left|f\left(x\right)\right| + C$ гэж гарна. Энэ нь (2) томьёоны бас нэг баталгаа юм.

Жишээ 1. $\int \frac{1}{x+3}dx$ интегралыг функцийн дифференциал ашиглан бод.

Бодолт. $dx = d\left(x+3\right)$ тул $\int \frac{1}{x+3}dx = \int \frac{1}{x+3}d(x+3)$ гэж бичиж болох ба $t = x+3$ гэсэн орлуулга хийвэл $\int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + C$ болно. Орлуулгаа буцаавал $\int \frac{1}{x+3}dx = \ln|x+3| + C$ гэж гарна.

Жишээ 2. $\int \frac{3dx}{3x-2}$ интегралыг бод.

Бодолт. $y = \ln\left(3x-2\right)$ функцийн уламжлал олъё. Давхар функцийн уламжлал олох $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$ томьёо ашиглая. Хэрэв $t = 3x-2$ орлуулга хийвэл $y = \ln t$ болох ба $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t} = \frac{1}{3x-2}$, $\frac{dt}{dx} = 3$ гэж тус тус гарах тул $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{1}{3x-2}\times 3 = \frac{3}{3x-2}$ болно. Эндээс $\int \frac{3}{3x-2}dx = \ln|3x-2| + C$ болно. Энэ үр дүнг ерөнхийлөн дараах дүгнэлт хийж болно.

Хэрвээ $y = \ln f\left(x\right)$ гэж өгсөн байвал $\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{f\left(x\right)}$ тул урвуугаар

$$\int \frac{f'(x)}{f\left(x\right)}dx = \ln\left|f\left(x\right)\right| + C$$ гэж гарна.

Жишээ 3. $\int \frac{12dx}{3x-2}$ интегралыг бод.

Бодолт. $y = 4\ln(3x-2)$ функц өгсөн байг. Энэ функцийн уламжлал нь

$\frac{dy}{dx} = 4 \cdot \frac{3}{3x-2}$ гэж гарах тул $\int 4 \cdot \frac{3}{3x-2} dx = 4\int \frac{3}{3x-2} dx = 4\ln|3x-2| + C$ байна.

Иймд өмнөхөөс илүү ерөнхий дүгнэлт хийж болно:

> Хэрвээ $y = k\ln f(x)$ бол $\frac{dy}{dx} = k \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}$ тул
>
> урвуугаар $\int k \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} dx = k\ln|f(x)| + C$ гэж гарна.

Дасгал

1. Интегралыг $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$ томьёо ашиглан бод

а. $\int \frac{4}{x} dx$ б. $\int \frac{3}{3x-4} dx$ в. $3\int \frac{2x}{x^2-5} dx$ г. $\int \frac{6x^2}{2x^3-1} dx$

д. $\int 5 \cdot \frac{4x+1}{2x^2+x+1} dx$ д. $\int \frac{8x^2}{2x^3+1} dx$ е. $\int \frac{x-4}{x^2-8x+17} dx$ ё. $\int \frac{x-\frac{1}{2}}{x^2-x+1} dx$

ж. $\int \frac{3x+1}{x^2+\frac{2}{3}x} dx$ з. $\int \frac{8x+2}{2x^2+x-5} dx$ и. $\int \frac{3y^2+2y}{y^3+y^2} dy$ k. $\int \frac{3t^3}{4t^4} dt$

2. Олон гишүүнтийн хуваах үйлдэл ашиглан бүхэл хэсэг ялгаж интеграл бод

а. $\int \frac{3x^2+17x+5}{x^2+5x} dx$ б. $\int \frac{3x^2-4x-2}{x^2-2x} dx$ в. $\int \frac{x^4+x^3+3x^2+2x}{x^3+x^2} dx$

г. $\int \frac{x^3+x}{x^2-1} dx$ д. $\int \frac{(x+1)^2}{x^2+1} dx$ е. $\int \frac{x^2+2x-4}{x^2-4} dx$

3. Интегралыг дараах мөрөнд буй зөв хариутай нь холбоорой. Жишээ болгон нэгийг холбож үзүүллээ.

$\boxed{\int \frac{2x}{x^2+4} dx}$ $\boxed{\int \frac{x-1}{x^2-2x} dx}$ $\boxed{\int \left(\frac{x}{x^2} + \frac{1}{2x}\right) dx}$ $\boxed{\int \frac{x+4}{x^2+8x} dx}$

$\boxed{\frac{1}{2}\ln|x^2-2x| + C}$ $\boxed{\frac{1}{2}\ln|x^2+2x| + C}$ $\boxed{\ln(x^2+4) + C}$ $\boxed{\frac{1}{2}\ln|x^2+8x| + C}$

4. Бодлогын бодолтын бичлэг дэх $\square$ дотор байх илэрхийллийг нөхөж бич.

Бодлого. $\int \frac{-6x}{x^2+4}dx$ интеграл бод.

Бодолт: $\left(x^2+4\right)' = \square x$ учраас

$\int \frac{-6x}{x^2+4}dx = \int \frac{-3\cdot\square x}{x^2+4}dx = -3\int \frac{\square}{x^2+4}dx = -3\ln\left|x^2+4\right| + C$ болно. $x^2+4>0$ тул

$\left|x^2+4\right| = x^2+\square$. Иймд $\int \frac{-6x}{x^2+4}dx = \square \ln\left(x^2+4\right)+C$ гэж гарна.

5. Хосоор ажиллаж дараах бодлогын бодолтын алдааг олоорой.

Бодлого. $\int \frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx$ интегралыг бод.

Бодолт. $\left(\sin x+\cos x\right)' = \cos x-\sin x$ тул $\int \frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx = \ln\left|\cos x-\sin x\right|+C$.

6. $\int \frac{5x}{2x^2-2}dx$ тодорхойгүй интегралын хоёр өөр бодолтыг харьцуулж дүгнэлт гаргаарай.

1 дүгээр бодолт. $\int \frac{5x}{2x^2-2}dx = \frac{5}{2}\int \frac{x}{x^2-1}dx$ болох тул $\frac{x}{x^2-1}$ бутархайг хялбар бутархайнуудын нийлбэрт тодорхойгүй коэффициентийн аргаар задлая.

$\frac{x}{x^2-1} = \frac{x}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}$ хэлбэртэй задрах ёстой. Хуваариас чөлөөлбөл $x = A(x-1)+B(x+1)$ болох ба эндээс $x=(A+B)x+B-A$ гэж гарна. Олон гишүүнтийн тэнцэх нөхцөлөөс $\begin{cases} A+B=1 \\ B-A=0 \end{cases}$ тэгшитгэлийн систем гарах ба эндээс $A=\frac{1}{2}, B=\frac{1}{2}$ гэж гарна. Иймд $\frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{2(x-1)}$ болов. Иймхүү

$$\int \frac{5x}{2x^2-2}dx = \frac{5}{2}\int \frac{x}{x^2-1}dx = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right)dx =$$

$$= \frac{5}{4}\left(\ln|x+1|+\ln|x-1|\right)+C = \frac{5}{4}\ln\left|x^2-1\right|+C.$$

2 дугаар бодолт. $\int \frac{5x}{2x^2-2}dx = \frac{5}{4}\int \frac{2x}{x^2-1}dx = \frac{5}{4}\int \frac{\left(x^2-1\right)'}{x^2-1}dx = \frac{5}{4}\ln\left|x^2-1\right|+C.$

7. Дараах интегралыг хэрхэн бодох талаар таамаглал дэвшүүлж, багаар ажиллаж бодоорой.

а. $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx =$ б. $\int \mathrm{tg}x\, dx$ в. $\int ctgx\, dx$

8. Тодорхойгүй интеграл бод

а. $\int \frac{\cos x}{2+\sin x} dx$ б. $\int \frac{x^2}{x^3+5} dx$ в. $3\int \frac{e^x}{6+e^x} dx$ г. $\int \frac{3e^{2x}}{7-e^{2x}} dx$

9. Багаар ажиллах дадлага ажил.

$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$ томьёог ашиглан бодох хоёр жишээг өөрсдөө зохиогоод бусад багуудаараа бодуулж, үнэлгээ өгөөрэй. Үнэлгээ өгөх шалгуурыг багаараа хэлэлцэн боловсруулна. Тухайлбал ямар үед бүтэн 5 оноо өгөх, ямар үед 1 оноо өгөх гэх мэтээр өгөх оноогоо эхлээд тохиролцсон байна.

10. Тодорхойгүй интеграл бод

а. $\int \frac{\cos x}{\sin x + 1} dx$ б. $\int \frac{\cos^2 x}{\mathrm{ctg}\, x} dx$ в. $\int \frac{e^x + 2e^{-2x}}{e^x - e^{-2x}} dx$ г. $\int \mathrm{tg}3x dx$

5.6 $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$ ***томьёо ашиглан тодорхой интеграл бодох***

$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$ томьёо нь тодорхой интегралын хувьд дараах хэлбэртэй болно.

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)|\Big|_a^b = \ln|f(b)| - \ln|f(a)|.$$

Жишээ 1. Тодорхой интегралыг бод $\int_2^3 \frac{2x}{x^2+1} dx$

Бодолт. $(x^2+1)' = 2x$ тул $\int_2^3 \frac{2x}{x^2+1} dx = \ln(x^2+1)\Big|_2^3 = \ln 10 - \ln 5 = \ln 2$.

Жишээ 2. $\int_1^2 \frac{4}{4x+3} dx$ тодорхой интегралыг бодож, хариуг 0.01 нарийвчлалтай тоймло.

Бодолт. $\int_1^2 \frac{4}{4x+3} dx = \ln|4x+3|\Big|_1^2 = \ln 11 - \ln 7 = \ln\frac{11}{7} \approx 0.19629 \approx 0.20$.

Жишээ 3. $\int_0^1 \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1} dx$ тодорхой интеграл бод.

$$\int_0^1 \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\ln 3 - \ln 1\right) = \frac{1}{2}\ln 3.$$

Жишээ 4. а. $y = \mathrm{tg}x$ функцийн графикийг $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ завсар дээр байгуул

б. $y = \mathrm{tg}x$ функцийн график, $x = \frac{\pi}{4}$ шулуун, Ox тэнхлэгээр хязгаарлагдсан дүрсийн талбайг 0.01 нарийвчлалтай тоймлон олоорой.

в. $y = \mathrm{tg}x$ функцийн график, $x = -\frac{\pi}{4}, x = -\frac{\pi}{6}$ шулуун, Ox тэнхлэгээр хязгаарлагдсан дүрс зурж талбайг 0,001нарийвчлалтай тоймлон ол.

Бодолт. а. $y = \mathrm{tg}x$ функцийн график нь 1.а зураг дээрх муруй шугам болно.

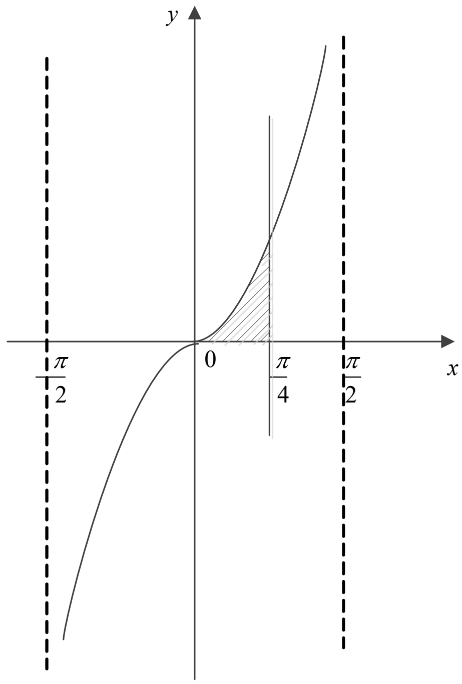
б. Талбайг нь олох дүрс нь 1.а. зураг дахь зураасласан хэсэг болно.

Энэ талбай нь

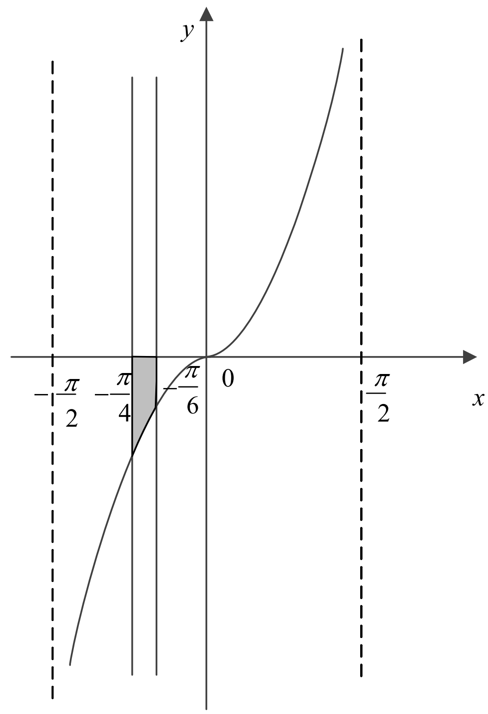
$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x)'}{\cos x}dx = -\ln|\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= -\left(\ln\cos\frac{\pi}{4} - \ln\cos 0\right) = -\left(\ln\frac{1}{\sqrt{2}} - \ln 1\right) = -\ln\left(\sqrt{2}\right)^{-1} = \ln\sqrt{2} \approx 0.35$$

в. 1 дүгээр арга. Талбайг нь олох дүрс нь 1.б. зураг дээрх зураасласан хэсэг болно.



Зураг 1.а.



Зураг 1.б.

Талбайг нь олох муруй шугаман трапец Ox тэнхлэгийн доор байрлажээ. 11 дүгээр ангид үзсэн нэгэн чанарыг эргэн санаая.

Хэрэв $y = f(x)$ функцийн график $[a, b]$ хэрчим дээр Ox тэнхлэгийн доор оршиж байвал энэ функцийн график ба $x = a, x = b$ шулуун, Ox тэнхлэгээр хязгаарлагдсан муруй шугаман трапецийн талбай

$$S = -\int_a^b f(x)dx$$ -тай тэнцүү.

Иймд энэ чанарыг ашиглан талбайг нь олъё.

$$S=-\int_{-\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{6}}\mathrm{tg}x\,dx=-\int_{-\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{6}}\frac{-(\cos x)'}{\cos x}dx=\ln|\cos x|\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{6}}=\ln\left|\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right|-\ln\left|\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right|=$$

$$\ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right|-\ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right|=\ln\frac{\sqrt{3}}{2}-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}=\ln\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\ln\sqrt{\frac{3}{2}}\approx 0,203.$$

2 дугаар арга. $S=-\int_{-\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{6}}\mathrm{tg}x\,dx$ интегралыг мөн 11 дүгээр ангид үзсэн интегралын 4 дүгээр чанарыг ашиглан бодож болно.

(4) $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

4 дүгээр чанар ёсоор:

$$S=-\int_{-\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{6}}\mathrm{tg}x\,dx=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}x\,dx=\left(-\ln|\cos x|\right)\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{4}}=-\left(\ln\left|\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right|-\ln\left|\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right|\right)=$$

$$\ln\left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|-\ln\left|-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|=\ln\frac{\sqrt{3}}{2}-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}=\ln\sqrt{\frac{3}{2}}\approx 0.203.$$

Жишээ 5. а. $f(x)=\frac{2x}{x^2-1}$ функцийг уламжлал ашиглан шинжилж графикийг байгуул. Хэвтээ ба босоо асимптотыг олж, зураарай

б. $f(x)=\frac{2x}{x^2-1}$ функцийн график ба $x=2, x=3$ шулуун, Ox тэнхлэгээр хязгаарлагдсан дүрсийн талбайг ол.

Бодолт. а. Энэ функцийн графикийг байгуулъя.

I. Тодорхойлогдох муж. Функц $x^2-1=0$ буюу $x=\pm 1$ үед утгагүй. Иймд функцийн тодорхойлогдох муж нь $]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;\infty[$ гэж гарна.

II. $f(-x)=\frac{2(-x)}{(-x)^2-1}=-\frac{2x}{x^2-1}=-f(x)$ тул сондгой функц. Иймд график нь координатын эхийн хувьд тэгш хэмтэй байна.

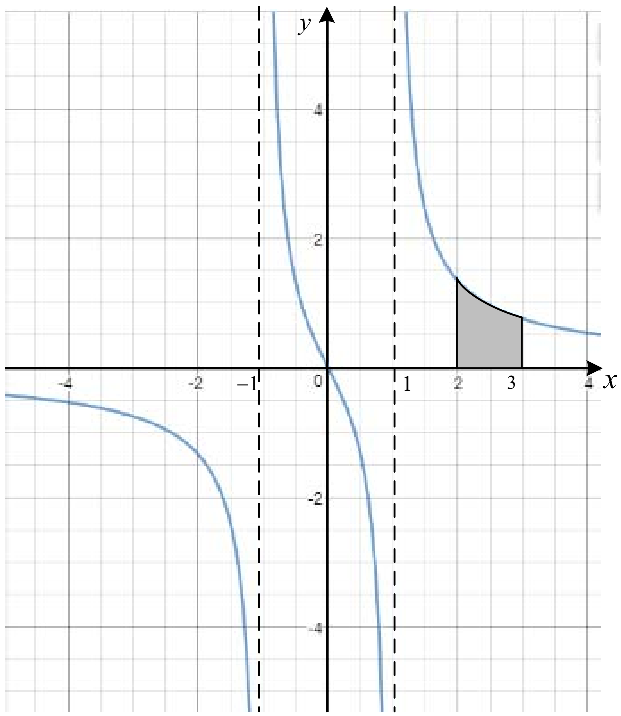
III. $f(x)=\frac{2x}{x^2-1}=0$ гэдгээс $2x=0$ буюу $x=0$. Мөн $x=0$ үед $f(0)=0$ тул функцийн график (0,0) цэгийг дайрна.

IV. Сэжигтэй цэг. $f'(x)=\frac{2(x^2-1)-2x\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{-2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}\neq 0$ тул функц сэжигтэй цэггүй. Энд $x^2+1>0$.

V. $f'(x) < 0$ байгаа тул функц тодорхойлогдох муж дээрээ буурна. Экстремумын цэггүй.

VI. Хэвтээ ба босоо ассимптот. $x^2 - 1 = 0$ тэгшитгэлээс $x = \pm 1$ гэж гарах тул $x = 1,\ x = -1$ гэсэн хоёр босоо асимптоттой. Хүртвэрийн зэрэг нь хуваарийн зэргээс бага тул $y = 0$ шулуун хэвтээ асимптот болно.

VII. Дээрх үр дүнгүүдэд үндэслэн графикийг тоймлон зурвал (Асимптотуудын хооронд нэмэлт нэгээс хоёр цэг олж тэмдэглэнэ.) дараах график гарна (Зураг 2 үз).



Зураг 2.

б. Талбайг нь олох дүрс нь зураг 2. дээрх саарал өнгөөр будсан дүрс юм.

$\left(x^2 - 1\right)' = 2x$ учраас олох талбай нь

$$S = \int_2^3 \frac{2x}{x^2 - 1}\,dx = \ln\left|x^2 - 1\right|\Big|_2^3 = \ln 8 - \ln 3 = \ln\frac{8}{3} \approx 0.98\ .$$

Жишээ 6. $\int_{-1}^{1} \frac{e^x}{6 + e^x}\,dx$ тодорхой интегралыг бод.

Бодолт. $\left(6 + e^x\right)' = e^x$ тул

$$\int_{-1}^{0} \frac{e^x}{e^x + 2}\,dx = \left[\ln\left(e^x + 2\right)\right]_{-1}^{0} = \left(\ln(1+2) - \ln\left(\frac{1}{e} + 2\right)\right) = \ln\frac{3e}{2e+1}\ .$$

Дасгал.

1. Тодорхой интеграл бодоорой.

а. $\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx$ б. $\int_1^2 \frac{3}{3x-1}dx$ в. $\int_1^3 \frac{x+1}{x^2+2x}dx$ г. $\int_1^2 \frac{6x^2}{2x^3-1}dx$

2. Тодорхой интегралыг 0.01 нарийвчлалтай бодоорой

а. $\int_{-1}^1 \frac{4x+1}{2x^2+x+1}dx$ б. $\int_4^5 \frac{x-4}{x^2-8x+17}dx$ в. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x-\frac{1}{2}}{x^2-x+1}dx$

3. Тодорхой интегралыг бод.

а. $\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{3+\sin x}dx$ б. $\int_0^1 \frac{2e^{2x}}{7+e^{2x}}dx$ в. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin 2x}{\cos^2 x}dx$

4. $y=\mathrm{tg}x$ функцийн график, $x=\frac{\pi}{6}, x=\frac{\pi}{3}$ шулуун ба Ox, Oy тэнхлэгээр хязгаарлагдсан дүрс зурж талбайг 0,001нарийвчлалтай тоймлон ол.

5. а. $f(x)=\frac{2x}{x^2-4}$ функцийг уламжлал ашиглан шинжилж графикийг байгуул. Хэвтээ ба босоо асимптотыг олж, зураарай

б. $f(x)=\frac{2x}{x^2-4}$ функцийн график, $x=3, x=4$ шулуун, Ox тэнхлэгээр хязгаарлагдсан дүрсийн талбайг ол.

в. $f(x)=\frac{2x}{x^2-4}$ функцийн график, $x=1$ шулуун, Ox ба Oy тэнхлэгээр хязгаарлагдсан дүрсийн талбайг ол.

6. Хэрэв $\int_0^k \frac{2x}{x^2+4}dx=3$ бол k -ийн утгыг 0,01 нарийвчлалтай олоорой.

5.7 Орлуулах аргаар тодорхой болон тодорхой бус интегралыг хялбар интегралд шилжүүлэн бодох

$\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx$ энэ интегралыг яаж бодох вэ? гэсэн асуудал дэвшүүлье.

Өмнө үзсэн аргуудаар энэ интегралыг бодох боломжгүй юм.

Тэгвэл x-ээс хамаарсан илэрхийллийг шинэ хувьсагчаар илэрхийлснээр өгсөн интегралыг бодож болдог. Интегралыг $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx=F(x)$ гэж тэмдэглэе.

Интегралчилах ба уламжлал авах нь харилцан урвуу тул

$$F'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x}}$$

болно.

Энэ функц нь квадрат язгуур агуулж байна. Иймд $x = u^2$ орлуулга хийе.

Тэгвэл $F(x)$ нь давхар функц болох ба давхар функцээс уламжлал авах дүрмээр

$$F'(x) = \frac{dF}{dx} = \frac{dF}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u^2 + u} \cdot 2u = \frac{2}{u + 1}$$

Гэж гарна.

$F(x)$ –ийн уламжлал нь u хувьсагчаас хамаарсан, өмнөхөөс хялбар функц гарсан байна. Эндээс $F(x)$ -ийг u-аар интеграл аван олж чадна.

$$F(u) = \int \frac{2}{u + 1} du = 2 \ln|u + 1| + C$$

u хувьсагчийн оронд $\sqrt{x}$ ийг орлуулж анхны интегралыг олно.

$$F(x) = \int \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx \ = 2 \ln(\sqrt{x} + 1) + C$$

($\sqrt{x} + 1 > 0$ тул модулийн тэмдэг шаардлагагүй).

Дээрх аргыг интегралыг бодох орлуулах арга гэнэ.

Ерөнхий тохиолдолд:

$F(x) = \int f(x)\, dx$ интегралыг бодохын тулд $F'(x) = \frac{dF}{dx} = f(x)$ тэгшитгэлд $x = g(u)$ орлуулга хийе. f нь давхар функц болно. Тэгвэл давхар функцээс уламжлал авах дүрмээр

$$\frac{dF}{du} = \frac{dF}{dx} \cdot \frac{dx}{du} = \ f(x) \cdot \frac{dx}{du} = f\big(g(u)\big) \cdot \frac{dx}{du} = h(u) \cdot \frac{dx}{du}$$

гэж гарна. Энд $f\big(g(u)\big) = h(u)$ давхар функц. $\int h(u) \cdot \frac{dx}{du}$ интегралыг бодож, u хувсагчийн оронд $g^{-1}(x)$ гэж орлуулж $F(x)$-ийг олно.

Орлуулах арга

$x = g(u)$ ба $f\big(g(u)\big) = h(u)$ орлуулгаар $\int f(x)\, dx$ интеграл нь түүнтэй тэнцүү $\int h(u) \cdot \frac{dx}{du} du$ хялбар интегралд шилжих ба дараа нь u хувьсагчийн оронд $g^{-1}(x)$ орлуулж анхны интегралыг олно.

Тодорхойгүй интегралд хувьсагчийг солихдоо 2 аргаар орлуулга хийдэг.

1) $x = g(u)$. Энд $g(u)$ нь уламжлалтай, урвуутай функц байх хэрэгтэй. u нь шинэ хувьсагч юм.
   Энэ тохиолдолд орлуулах арга нь
   $\int f(x)\, dx = \int f\big(g(u)\big) g'(u)\, du$ хэлбэртэй болно.
2) $u = h(x)$. Энд u нь шинэ хувьсагч, $\int f(x) dx$-ийн нэг хэсэг нь $h(x)$, үлдсэн хэсэг нь $h'(x)dx$ байх юм. Энэ тохиолдолд орлуулах арга нь
   $\int f\big(h(x)\big) h'(x)\, dx = \int f(u)\, du$ хэлбэртэй болно.

Санамж . Практикт ихэвчлэн хоёр дахь хэлбэрийн орлуулгыг хийдэг. Орлуулах аргаар интеграл бодоход $u = h(x)$ тэнцэтгэлийн хоёр талыг дифференциалчилбал $d(u) = h'(x)dx$ байдгийг олонтаа ашиглана.

Жишээ 1. $\int x\sqrt{x-5}dx$ интеграл бод

Бодолт. $u = x - 5$ гэж орлуулъя. Эндээс $x = u + 5$ ба $du = dx$ гэж гарах тул

$$\int x\sqrt{x-5}dx = \int (u+5)\sqrt{u}du = \int\left(u^{\frac{3}{2}} + 5u^{\frac{1}{2}}\right)du = \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{10}{3}u^{\frac{3}{2}} + C =$$

$$= \frac{2}{5}(x-5)^{\frac{5}{2}} + \frac{10}{3}(x-5)^{\frac{3}{2}} + C = (x-5)\sqrt{x-5}\left(\frac{2}{5}(x-5) + \frac{10}{3}\right) + C.$$

Жишээ 2. $\int \sqrt{\sin x}\cos x dx$ интегралыг бод.

Бодолт. Энэ интегралыг өмнөх бүлэгт үзсэн аргуудаар бодох боломжгүй байна.

$u = \sin x$ гэж орлуулъя. $du = d\sin x = \cos x dx$ болно. Бидний бодох интеграл $\int \sqrt{\sin x}\cos x dx = \int \sqrt{u}du$ гэсэн хялбар, зэрэгт функцийн интеграл боллоо.

Иймд $\int \sqrt{u}du = \int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$. Одоо хэрэв $u = \sin x$ гэж орлуулбал

$\int \sqrt{\sin x}\cos x dx = \frac{2}{3}\sqrt{\sin^3 x} + C$ болно.

Жишээ 3. $\int \frac{1}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}dx$ интегралыг бод.

Бодолт. $u = 1 - \frac{1}{x}$ гэж орлуулъя. Тэгвэл $du = \left(1-\frac{1}{x}\right)' dx = x^{-2}dx = \frac{1}{x^2}dx$ тул

$$\int \frac{1}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}dx = \int \frac{1}{u^2}du = \int u^{-2}du = -\frac{u^{-2+1}}{-2+1} + C =$$

$$= -u^{-1} + C = -\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-1} + C = -\left(\frac{x-1}{x}\right)^{-1} + C = -\frac{x}{x-1} + C.$$

Жишээ 4. $\int x\left(x^2-2\right)^{15} dx$ интеграл бод.

Бодолт. $u = x^2 - 2$ гэвэл $du = 2xdx$ болох ба эндээс $xdx = \frac{1}{2}du$ гэж гарна. Иймд

$$\int x\left(x^2-2\right)^{15}dx = \int \left(x^2-2\right)^{15}xdx = \int u^{15}\cdot\frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\int u^{15}du = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{16}}{16} + C = \frac{1}{32}u^{16} + C =$$

$$= \frac{1}{32}\left(x^2-2\right)^{16} + C.$$

Жишээ 5. $\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$ интеграл бод.

Бодолт. $u = \sqrt[3]{x}$ гэе. Эндээс $x = u^3$ гэж гарна. Хоёр талыг дифференциалчилбал $dx = 3u^2du$ болно. Энэ орлуулгыг хийснээр синусын тэмдэг дор интегралын хувьсагч язгуургүй болох болно. Иймд

$$\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int \frac{\sin u \cdot 3u^2 du}{u^2} = 3\int \sin u du = -3\cos u + C$$ гэж гарна.

$u = \sqrt[3]{x}$ орлуулгаа буцаавал $\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx = -3\cos\sqrt[3]{x} + C$ болно.

Жишээ 6. $\int x^2\sqrt{x^3+5}dx$ интегралыг бод.

Бодолт. $\sqrt{x^3+5} = u$ гэе. Эндээс $x^3+5 = u^2$ гэж гарна. Тэнцэтгэлийн хоёр талыг дифференциалчилбал $3x^2dx = 2udu$ буюу $x^2dx = \frac{2}{3}udu$ болно. Эндээс

$$\int x^2\sqrt{x^3+5}dx = \int \sqrt{x^3+5}\cdot x^2dx = \int u\cdot\frac{2}{3}udu = \frac{2}{3}\int u^2du =$$

$$= \frac{2}{9}u^3 + C = \frac{2}{9}\left(\sqrt{x^3+5}\right)^3 + C = \frac{2}{9}\left(x^3+5\right)\sqrt{x^3+5} + C.$$

Жишээ 7. (1 дүгээр төрлийн орлуулга) $\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}+1}dx$ интегралыг бод.

Бодолт. Хэрэв $x = u^4$ гэж орлуулбал $x^{\frac{1}{2}} = u^2$, $x^{\frac{3}{4}} = \left(u^4\right)^{\frac{3}{4}} = u^3$, $dx = 4u^3du$ болно. Иймд
манай интеграл шинэ u гэсэн хувьсагчтай болох ба бүхэл хэсэг ялгах адилтгал хувиргалт хийгээд $\left(u^3+1\right)' = 3u^2$ гэдгийг анзааран дараах байдлаар бодно:

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}+1}dx = 4\int \frac{u^2}{u^3+1}u^3du = 4\int \frac{u^5+u^2-u^2}{u^3+1}du = 4\int\left(u^2 - \frac{u^2}{u^3+1}\right)du =$$

$$4\cdot\frac{u^3}{3} - \frac{4}{3}\ln\left|u^3+1\right| + C = \frac{4}{3}\left[x^{\frac{3}{4}} - \ln\left|x^{\frac{3}{4}}+1\right|\right] + C.$$

Эдгээр жишээнээс харахад хувьсагчийг солих аргыг хэрэглэхдээ интегралын доорх илэрхийллийн зарим хэсгийг $u = h(x)$ гэж орлуулахад түүний уламжлал нь үлдсэн илэрхийлэлд байвал ашигтай байна.

Жишээ 8. $\int \frac{\left(2\ln x+3\right)^3}{x}dx$ интегралыг бод

Бодолт. Интегралыг $\int \left(2\ln x+3\right)^3\frac{1}{x}dx$ гэж бичье. $\left(2\ln x+3\right)$ -ийн уламжлал нь $\frac{2}{x}$ байгаа ба энэ нь хоёр дахь үржигдэхүүн $\frac{1}{x}$ -ээс зөвхөн 2 гэсэн коэффициентээр л ялгаатай байна. Иймд $2\ln x+3 = u$ гэж орлуулах хэрэгтэй. Эндээс $2\cdot\frac{1}{x}dx = du$

буюу $\frac{1}{x}dx = \frac{1}{2}du$ болно. Иймд

$$\int \frac{(2\ln x+3)^3}{x}dx = \int u^3 \cdot \frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\int u^3 du = \frac{1}{8}u^4 + C = \frac{1}{8}(2\ln x+3)^4 + C.$$

Дасгал 1. Заасан орлуулгыг хийж интегралыг бодоорой

а. $\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^2 x}dx;\ (\sin x = u)$ б. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}};\ (\sqrt{x} = u)$

в. $\int (4x+7)^8 dx;\ (4x+7=u)$ г. $\int \frac{xdx}{1-x^2};\ (1-x^2=u)$

д. $\int x\sqrt{x-4}dx;\ \left(\sqrt{x-4}=u\right)$ е. $\int x(1+2x)^8 dx;\ (1+2x=u)$

ё. $\int \frac{x+1}{(2x+1)^2}dx;\ (u=2x+1)$ ж. $\int \frac{x^3}{(x+2)^2}dx;\ (u=x+2)$

Дасгал 2. Орлуулах аргаар интегралыг бод

а. $\int \sqrt{6x-12}dx$ б. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{4x+3}}$ в. $\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx$ г. $\int \frac{4x+2}{(x-2)^3}dx$

Дасгал 3. Тодорхой интеграл бод

а. $\int x^3\left(1-5x^2\right)^{10}dx$ б. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ в. $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$ г. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$

Дасгал 4. Орлуулах аргаар интеграл бодоорой

а. $\int \frac{1}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}dx$ б. $\int \frac{x}{1+x^4}dx$ в. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^6}};\ \left(\sqrt{1-x^6}=u\right)$

Дасгал 5. Тодорхойгүй интеграл бод

а. $\int \frac{1}{x-\sqrt{x}}dx$ б. $\int \sqrt{\cos x}\sin x dx$ в. $\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}-1}dx$ г. $\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}dx$

д. $\int \frac{e^{\sqrt{2x-1}}}{\sqrt{2x-1}}dx$ е. $\int x^3\left(1-2x^4\right)^3 dx$ ё. $\int \sin(2-3x)dx$ ж. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$

Тодорхой интегралын хувьсагчийг сольж бодох

Тодорхой интегралд шинэ хувьсагч хэрэглэх үед интегралын доод дээд хязгаарыг шинэ хувьсагчийн хувьд бодож олоод интегралаа боддог.

Жишээ 1. $\int_{-2\pi}^{-\pi} \frac{dx}{\sin^2\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{3}\right)}$ интегралыг бод.

Бодолт. $t=\frac{\pi}{6}-\frac{x}{3}$ гэсэн орлуулга хийе. Хоёр талыг дифференциалчилбал

$dt=-\frac{1}{3}dx$ буюу $dx=-3dt$ болно.

Шинэ t хувьсагчийн хувьд интегралын доод ба дээд хязгаарыг олъё. $x=-2\pi$ үед $t=\frac{\pi}{6}-\frac{-2\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}$, $x=-\pi$ үед $t=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$ гэж тус тус гарна.

$$\int_{-2\pi}^{-\pi} \frac{dx}{\sin^2\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{3}\right)}=-3\cdot\int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sin^2 t}=-3\cdot\left[\left(-ctgt\right)\right]_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=3\cdot\left[\left(ctg\left(\frac{\pi}{2}\right)-ctg\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)\right]=$$

$$=3\cdot\left(0--\sqrt{3}\right)=3\sqrt{3}$$

Тодорхой интегралыг хувьсагч сольж бодох үед яагаад заавал интегралын доод, дээд хязгаарын утгыг сольж бодох ёстой вэ? Нэг жишээ авч тайлбарлая.

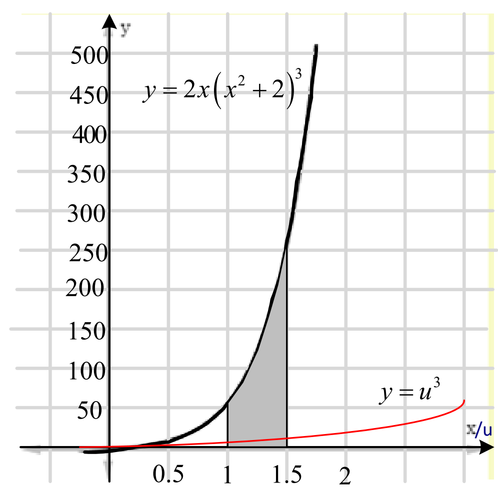
Жишээ 2. $\int_{1}^{1.5} 2x\left(x^2+2\right)^3 dx$ тодорхой интегралыг бод.

Бодолт. x^2+2 -ийн уламжлал нь $2x$ байгаа тул $x^2+2=u$ гэж орлуулъя. Эндээс $2xdx=du$ гэж гарах тул манай интеграл $\int_{1}^{1.5} 2x\left(x^2+2\right)^3 dx=\int_{1}^{1.5} u^3du$ боллоо.

Гэвч анхны интегралын геометр утга нь $y=2x\left(x^2+2\right)^3$ функцийн график, $x=1, x=1.5$ шулуун, Ox тэнхлэгийн хооронд хязгаарлагдсан муруй шугаман трапецийн талбай юм. (а. зураг) Гэтэл бид муруйгаа $y=u^3$ муруйгаар сольсон үед хязгаараа солихгүй бол хоёр дах интегралын утга анхныхаас өөр гарах нь б. зургаас харагдаж байна.

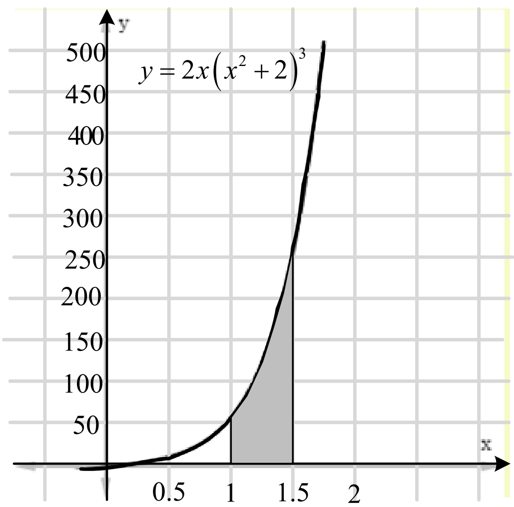
u хувьсагчийн хувьд хувьсах хязгаарыг нь олохын тулд $x=1$ ба $x=1.5$ үед x^2+2 -ийн харгалзах утгыг олох хэрэгтэй.

Доод хязгаар нь: $u=1^2+2=3$, дээд хязгаар нь $u=1.5^2+2=4.25$ болно. Одоо бид шинэ u хувьсагчийн хувьд интегралыг бичвэл $\int_{1}^{1.5} 2x\left(x^2+2\right)^3 dx=\int_{3}^{4.25} u^3du$ болно. u хувьсагчийн хувьд интегралаа бодъё:



$$\int_3^{4.25} u^3 du = \left[\frac{u^4}{4}\right]_3^{4.25} = \frac{4.25^4 - 3^4}{4} = \frac{326.25390625 - 81}{4} = \frac{245.25390625}{4} \approx 61.3$$ гэж

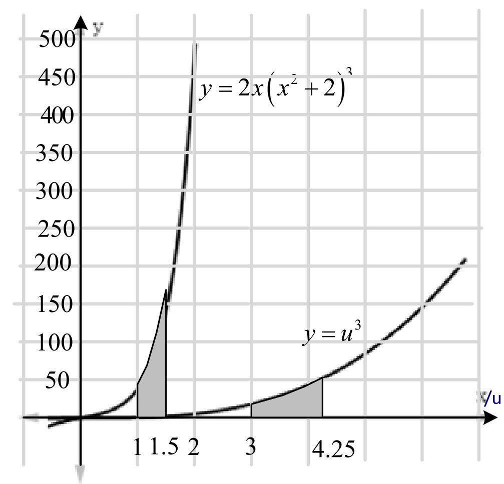
гарна. Энэхүү шинэ хувьсагчийн хувьд олох талбайг –р зургийн в-д харууллаа.



Зураг а.

Зураг

б.



Зураг

в.

Жишээ 3. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+2x}} dx$ интеграл бод.

Бодолт. Энэ интегралд $u = 1 + 2x$ орлуулга хийе. Эндээс $x = \frac{u-1}{2}$ ба $dx = \frac{1}{2} du$ гэж гарна. Интегралын доод, дээд хязгаар нь харгалзан $u = 1 + 2\cdot 0 = 1, u = 1 + 2\cdot 1 = 3$ болно.

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+2x}} dx = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{\frac{u-1}{2}}{\sqrt{u}} du = \frac{1}{4}\int_1^3 \left(u^{\frac{1}{2}} - u^{-\frac{1}{2}}\right) du = \frac{1}{4}\cdot\left.\left(\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right)\right|_1^3 =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left[\left(\frac{2}{3}\cdot 3^{\frac{3}{2}} - 2\cdot 3^{\frac{1}{2}}\right) - \left(\frac{2}{3} - 2\right)\right] = \frac{1}{4}\cdot\left[\left(2\cdot 3^{\frac{1}{2}} - 2\cdot 3^{\frac{1}{2}}\right) - \left(-\frac{4}{3}\right)\right] = \frac{1}{3}.$$

Жишээ 4. $\int_1^2 \frac{x+1}{(2x-1)^3}dx$ тодорхой интегралыг орлуулах аргаар болон адилтгал хувиргалтын аргаар хэрхэн зэрэгт функцийн интегралд шилжүүлж бодож байгааг ажиглаж, аргуудын давуу тал, сул талыг харьцуулж ярилцаарай.

1 дүгээр бодолт (орлуулах арга). $t = 2x-1$ гэж орлуулъя. Эндээс $dt = 2dx$ буюу $dx = \frac{dt}{2}$ гэж гарна. Орлуулгаас $x+1 = \frac{t+3}{2}$ болно. Интегралын доод хязгаар нь $t = 2\cdot 1 - 1 = 1$, дээд хязгаар нь $t = 2\cdot 2 - 1 = 3$ болно. Ийнхүү

$$\int_1^2 \frac{x+1}{(2x-1)^3}dx = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{t+3}{t^3}\cdot\frac{dt}{2} = \frac{1}{4}\int_1^3\left(\frac{1}{t^2}+\frac{3}{t^3}\right)dt = \frac{1}{4}\int_1^3\left(t^{-2}+3t^{-3}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{t^{-1}}{-1}+3\frac{t^{-2}}{-2}\right]_1^3 = \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{t}-\frac{3}{2t^2}\right]_1^3 = -\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)-\left(1+\frac{3}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}.$$

2 дугаар бодолт (адилтгал хувиргалтын арга).

$$\int_1^2 \frac{x+1}{(2x-1)^3}dx = \int_1^2 \frac{x-0.5+1.5}{(2x-1)^3}dx = \int_1^2 \frac{0.5}{(2x-1)^2}dx + \int_1^2 \frac{1.5}{(2x-1)^3}dx =$$

$$= \left[-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2x-1}\right]_1^2 + \left[-\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{(2x-1)^2}\right]_1^2 = -\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}-1\right)-\frac{3}{8}\cdot\left(\frac{1}{9}-1\right) = \frac{1}{2}.$$

Жишээ 5. $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx$ интегралыг бод.

Бодолт. Хэрэв $\ln x = u$ гэвэл $\frac{1}{x}dx = du$ болно. $x=1$ үед $u = \ln 1 = 0$, $x = e$ үед $u = \ln e = 1$ болох тул $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx = \int_0^1 u^2 du = \left[\frac{1}{3}u^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}\left(1^3-0^3\right) = \frac{1}{3}$.

Дасгал.

1. (i) Тодорхой интегралыг орлуулах аргаар бод. ( ) дотор ямар орлуулга хийх зөвлөмж өгөв.

а. $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{5x-1}}$; ($5x-1=u$) б. $\int_0^1 \left(2x^3+1\right)^4 x^2dx$; ($2x^3+1=u$)

в. $\int_1^2 \frac{dx}{(3x+1)^4}$; ($3x+1=t$) г. $\int_0^3 \sqrt{3x-1}dx$; ($3x-1=t$)

(ii) Дээрх тодорхой интегралуудыг орлуулах арга хэрэглэхгүйгээр бодож, гарсан хариугаа орлуулах аргаар бодсон хариутайгаа тулгаарай.

2. Зааврын дагуу тодорхой интегралыг бодоорой.

а. $\int_2^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; $x = \frac{1}{u}$ орлуулга хий. б. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$; $\sqrt{e^x-1} = t$ орлуулга хий.

3. Тодорхой интегралыг орлуулах аргаар бодоорой (жишээ бодлогуудыг ашигла)

а. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x}\sin x dx$ б. $\int_2^3 \frac{1}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)^2} dx$ в. $\int_1^{\sqrt{2}} x\left(x^2-2\right)^{15} dx$

г. $\int_{-1}^3 x^2\sqrt{x^3+5}dx$ д. $\int_{-2\pi}^{-\pi} \frac{dx}{\sin^2\left(\frac{\pi}{6}+\frac{x}{3}\right)}$ е. $\int_0^{-4} \frac{x}{\sqrt{1-2x}}dx$

ё. $\int_1^2 2x\left(x^2-1\right)^3 dx$ ж. $\int_1^3 4x\left(x^2+1\right)^2 dx$ з. $\int_{-1}^1 3x^2\sqrt{x^3+1}dx$

4. Тодорхой интегралыг орлуулах аргаар бодоорой

а. $\int_0^3 \left(1+2x\right)^9 dx$ б. $\int_3^{-18} \sqrt[3]{2-\frac{x}{3}}dx$ в. $\int_1^2 \frac{x+1}{\left(2x-1\right)^3} dx$

г. $\int_{-1}^2 \frac{x}{\sqrt{2-\frac{x}{2}}} dx$ д. $\int_0^{28} \frac{5-x}{\sqrt{1+\frac{x}{4}}} dx$ е. $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}} \left(x-2\right)\sqrt[5]{3x-1}dx$

5. Тодорхой интегралыг орлуулах аргаар бод

а. $\int_0^1 x\left(x^2+1\right)^{3/2} dx$ б. $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{xdx}{\sqrt{x^4-1}}$ в. $\int_9^{16} \frac{dx}{\left(x-7\right)\sqrt{x}}$

6. а. Хэрэв $x=3\cos^2\alpha+5$ бол $5-x=2\cos^2\alpha$ болохыг харуул

б. $x-3$ -ыг өмнөхтэй төстэй илэрхийлээрэй

в. Өмнөх үр дүнгүүд ба $x=3\cos^2\alpha+5\sin^2\alpha$ орлуулгыг ашиглан

$\int_4^5 \frac{1}{\sqrt{x-3}\sqrt{5-x}} dx$ тодорхой интегралыг бодоорой.

7. Сурагч $\int_1^3 \left(2x-1\right)\left(x^2-x\right)^3 dx$ тодорхой интегралыг дараах байдлаар боджээ.

1 дүгээр алхам: $u=x^2-x$ гэж орлуулъя.

2 дугаар алхам: $du=\left(2x-1\right)dx$ гэж гарна.

3 дугаар алхам: $\int_1^3 \left(2x-1\right)\left(x^2-x\right)^3 dx = \int_1^3 u^3 du$

4 дүгээр алхам: $\int_1^3 u^3 du = \left[\frac{u^4}{4}\right]_1^3 = \frac{3^4}{4}-\frac{1^4}{4}=\frac{80}{4}=20$.

а. Сурагчийн бодолт зөв үү? Хэрвээ буруу бол алдаа нь юу байсан бэ?

б. Алдааг залруулж бодоорой.

8. $\int_1^2 12x^2\left(x^3-1\right)^3 dx$ тодорхой интегралын зөв хариуг олоорой.

А. 2500 Б. 2401 В. 1600 Г. 1204

9. Тодорхой интегралыг орлуулах аргаар бодоорой

а. $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x} dx$ б. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos^3 x dx$ в. $\int_0^1 \frac{4x}{\sqrt{1-x^4}} dx$ г. $\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \frac{1}{1+9x^2} dx$

10. Тодорхой интегралыг бод $\int_0^1 x^2 2^{x^3} dx = ?$

(Заавар: $2^{x^3} = \left(e^{\ln 2}\right)^{x^3} = e^{x^3 \ln 2}$ гэж бичээд $x^3 \ln 2 = u$ орлуулга хий.)