

III БҮЛЭГ ФУНКЦ БА ГРАФИК

Энэ бүлэг сэдвийг судалсанаар сурагчид дараах мэдлэг чадварыг эзэмшинэ.

Үүнд:

- Тооны логарифмыг мэдэх, ойлгох
- Зэрэг ба логарифмын харилцан хамаарлыг ойлгох, логарифмын чанаруудыг мэдэх, хэрэглэх
- $a^x = b$, $a^x \leq b$, $a^x > b$ хэлбэрийн хялбар илтгэгч тэгшитгэл тэнцэтгэл бишийг логарифм ашиглан бодох
- Илтгэгч ба логарифм функц нь харилцан урвуу функц болохыг ойлгох, чанарыг ойлгох, хэрэглэх
- e тоог мэдэх, $y = e^x$ ба $y = \ln x$ функцийн графикийг таних, тэдгээр нь харилцан урвуу функцүүд болохыг мэдэх, чанарыг ойлгох, хэрэглэх
- Рационал функцийг таних, хялбар тохиолдолд графикийг нь байгуулах

3.1. Тооны логарифм

Бид бодит тооны рационал илтгэгчтэй зэрэг, түүний чанарыг ашиглан илэрхийллийг хялбарчлахыг мэднэ. Харин энэ хэсэгт бид бодит тооны логарифм, түүний чанарууд, бодит тооны зэрэг ба логарифм хоорондын хамаарлыг судлах ба логарифм агуулсан илэрхийллийг хялбарчилж сурна.

Тооны логарифмын тодорхойлолтыг үзэхийн өмнө дараах жишээ авч үзье.

Жишээ 1. Бактерийн өсгөвөрт анх 1000 бактер байсан ба минут тутамд бактерийн тоо 2 дахин өснө. Тэгвэл 1 мин, 2 мин, 3 мин гэх мэт t минутын дараа бактерийн тоо хэд болох вэ?

Бодолт. Бактерийн өсөлтийг хугацаанаас хамаарсан функц гэж сэтгэж болно.

Өгсөн нөхцөл ёсоор $t = 0$ үед $y = 1000$ байна. Минут тутамд 2 дахин өсөх тул

$$t = 1 \text{ үед } y = 1000 \cdot 2, \quad t = 2 \text{ үед } y = 1000 \cdot 2 \cdot 2, \quad t = 3 \text{ үед } y = 1000 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

болно. Гэх мэтчилэн t минутын дараа бактерийн тоо нь

$$y = 1000 \cdot 2^t$$

болно.

Жишээ 1-ийн хувьд өөр нэг бодлого авч үзье. Ямар хугацааны дараа бактерийн тоо нь 60000 болох вэ? Өөрөөр хэлбэл $1000 \cdot 2^t = 60000$ буюу $2^t = 60$ байх t -ийн утгыг олно гэсэн үг юм. Энэ бодлого нь Жишээ 1 дэх бодлогын

урвуу бодлого юм. Үүнийг бодохын тулд тооны логарифмыг мэдэх хэрэгтэй болно.

Тодорхойлолт. Хэрэв $a \neq 1, a > 0, b > 0$ тоонуудын хувьд $a^k = b$ бол k тоог b тооны a суурьтай логарифм гэх бөгөөд $k = \log_a b$ гэж бичнэ. b тоог логарифмын доорх тоо, a тоог логарифмын суурь гэж нэрлэнэ. $\log_a b$ гэсэн бичлэгийг “логарифм a суурьтай b ” гэж уншина.

Өөрөөр хэлбэл $a \neq 1, a > 0, b > 0$ тоонуудын хувьд

$$\text{Хэрэв } b = a^k \text{ бол } \log_a b = k \text{ ба}$$

$$\text{Хэрэв } \log_a b = k \text{ бол } b = a^k$$

байна. Эдгээр нөхцлийг хамтад нь

$$b = a^k \Leftrightarrow \log_a b = k$$

гэж бичдэг.

Жишээ 1-д $2^t = 60$ байх t -ийн утгыг логарифмын тодорхойлолт ашиглан $t = \log_2^{60}$ гэж олж чадах ба \log_2^{60} -ын утгыг тооны машин ашиглан ойролцоогоор олж болно.

Жишээ 2. $2^5 = 32, 4^{-3} = \frac{1}{64}, 9^2 = 81$ тэнцэтгэл тус бүрийг логарифм ашиглан бичиж, унш.

Бодолт. $2^5 = 32$ тул тодорхойлолт ёсоор $\log_2^{32} = 5$ байна. Мөн $\log_2^{32} = 5$ тул $2^5 = 32$ байна. Эдгээрийг хамтад нь бичвэл $2^5 = 32 \Leftrightarrow \log_2^{32} = 5$ байна. $\log_2^{32} = 5$ гэсэн бичлэгийг “32-ын 2 суурьтай логарифм нь 5-тай тэнцүү” эсвэл “логарифм 2 суурьтай 32 нь 5-тай тэнцүү” гэж уншина.

$4^{-3} = \frac{1}{64} \Leftrightarrow \log_4^{\frac{1}{64}} = -3$ байна. $\log_4^{\frac{1}{64}} = -3$ гэсэн бичлэгийг “ $\frac{1}{64}$ -ийн 4 суурьтай логарифм нь -3 -тай тэнцүү” эсвэл “логарифм 4 суурьтай $\frac{1}{64}$ нь -3 -тай тэнцүү” гэж уншина.

Жишээ 3. $\log_2^{64} = 6, \log_{\sqrt{2}}^8 = 6, \log_4^{\frac{1}{16}} = -2, \log_9^9 = 1$ тэнцэтгэлийг зэрэг ашиглан бич.

Бодолт. $\log_2^{64} = 6 \Leftrightarrow 2^6 = 32,$ $\log_{\sqrt{2}}^8 = 6 \Leftrightarrow (\sqrt{2})^6 = 8$

$\log_4^{\frac{1}{16}} = -2 \Leftrightarrow 4^{-2} = \frac{1}{16},$ $\log_9^9 = 1 \Leftrightarrow 9^1 = 9$ байна.

Жишээ 4. Тодорхойлолт ашиглан $\log_8 8$, $\log_8 64$, $\log_{\frac{1}{2}} 32$, $\log_5 \frac{1}{125}$ логарифмын утгыг ол.

Бодолт. $\log_8 8 = 1$, $\log_8 64 = 2$, $\log_{\frac{1}{2}} 32 = -5$, $\log_5 \frac{1}{125} = -3$ байна.

Жишээ 5. $\log_2(\cos 60^\circ)$, $\log_4(\sin 30^\circ)$, $\log_{\sqrt{2}}(\tan 45^\circ)$ логарифмын утгыг ол.

Бодолт. $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\tan 45^\circ = 1$ тул $\log_2(\cos 60^\circ) = \log_2\left(\frac{1}{2}\right) = -1$, $\log_4(\sin 30^\circ) = \log_4\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$, $\log_{\sqrt{2}}(\tan 45^\circ) = \log_{\sqrt{2}} 1 = 0$ гэж гарна.

Санамж 1. Хэрэв логарифмын суурь нь 10-тай тэнцүү бол \lg гэсэн бичлэгийг ашигладаг. Тухайлбал, $\lg 100 = 2$ юм.

Санамж 2. Логарифмын дор яагаад сөрөг тоо байж болохгүй вэ?

$3^x = -5$ гэвэл $x = \log_3(-5)$ гэж бичиж болох юм шиг санагдаж магадгүй. Гэтэл бүх бодит x -ийн хувьд 3^x нь эерэг тоо байна. Өөрөөр хэлбэл $3^x = -5$ тэгшитгэл шийдгүй. Иймд $3^x = -5$ -ийг $x = \log_3(-5)$ гэж бичих боломжгүй юм. Логарифмын дор яагаад сөрөг тоо байж болохгүй гэдгийг эндээс төсөөлж болно.

Санамж 3. Логарифмын суурь яагаад нэгээс ялгаатай эерэг тоо байх хэрэгтэй вэ?

$\log_1 5 = x$ гэвэл $1^x = 5$ бичиж болох юм шиг санагдаж магадгүй. Гэтэл 1^x нь 5-тай тэнцүү байх x -ийн утга олдохгүй. $\log_1 1 = x$ гэвэл $1^x = 1$ бичиж болох боловч x -ийн утга нэг утгатай олдохгүй. Үүнтэй адилаар логарифмын суурь нь тэг байх боломжгүй юм.

Тодорхойлолт дээр тулгуурлан дараах дүгнэлтүүдийг хийж болно.

- | |
|---|
| <ol style="list-style-type: none">1. Хэрэв $a \neq 1$, $a > 0$ бол $a^0 = 1 \Leftrightarrow \log_a^1 = 0$ байна.2. Хэрэв $a \neq 1$, $a > 0$ бол $a^1 = a \Leftrightarrow \log_a a = 1$ байна.3. Хэрэв a, b, c нь эерэг тоо ба $a \neq 1$ бол $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$ байна. |
|---|

Санамж. Хэрэв a, b, c нь эерэг тоо ба $a \neq 1$ бол $b = c$ тэнцэтгэлийг $\log_a b = \log_a c$ гэж бичиж болно. Үүнийг $b = c$ тэнцэтгэлийг **a сууриар логарифмчлах** гэж ярьдаг. Ижил сууриар логарифмчлах нь зарим бодлогыг бодоход чухал ач холбогдолтой. Энэ тухай дараа авч үзнэ.

Жишээ 6. Дараах логарифмын утга олдож байхаар x бодит тоог ол.

а. $\log_3(2 - 5x)$ б. $\log_{\frac{1}{2}}(3x + 1)^2$ в. $\log_{x-1}(x + 5)$

Бодолт. а. $2 - 5x > 0$ үед $\log_3(2 - 5x)$ утга тодорхойлогдоно. Иймд $2 - 5x > 0$ тэнцэтгэл бишийг бодвол $x < \frac{2}{5}$ гэж гарна.

б. Бүх бодит x -ийн хувьд $(3x + 1)^2 \geq 0$ байна. Логарифмын дор тэгээс эрс их тоо байх ёстой тул $(3x + 1)^2 \neq 0$ тул эндээс $x \neq \frac{1}{3}$ гэж гарна.

в. $\log_{x-1}(x + 5)$ илэрхийлэлийн утга

$$\begin{cases} x + 5 > 0 \\ x - 1 > 0 \\ x - 1 \neq 1 \end{cases}$$

үед тодорхойлогдоно. Энэ системийг бодвол

$$\begin{cases} x > -5 \\ x > 1 \text{ буюу } x \in]1, 2[\cup]2, \infty[\\ x \neq 2 \end{cases}$$

гэж гарна.

Дасгал

1. Дараах тэнцэтгэлийг зэрэг хэлбэртэй болгон бич.

а. $\log_{\sqrt{5}} 125 = 6$ б. $\log_4 \frac{1}{8} = -\frac{3}{2}$ в. $\log_7 \sqrt{7} = \frac{1}{2}$

2. Дараах тэнцэтгэлийг логарифм ашиглан бич.

а. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$ б. $256^{\frac{1}{4}} = 4$ в. $11^0 = 1$

3. Дараах логарифмын утга тодорхойлогдох x -ийн утгыг ол.

а. $\log_x(x^2 - 3x - 10)$ б. $\log_{x-3}(-x^2 + 5x - 4)$ в. $\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{x+5}{x}\right)$

4. Дараах нөхцлийг хангах x -ийн утгыг ол.

а. $\log_8 0.25 = x$ б. $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} x = -4$ в. $\log_x 16 = \frac{4}{3}$

5. Дараах илэрхийллийн утгыг ол.

а. $\log_6 216 - \log_5 25$ б. $2(\log_{\sqrt{3}} 3 + \log_3 1)$ в. $-\frac{1}{3}\log_{\frac{1}{5}} 25 + \log_9 \sqrt{3}$

3.2. Логарифмын чанар

Логарифм агуулсан илэрхийлэл хялбарчлах, логарифм ашиглан тооцоо хийх гэх мэт олон зорилгыг хэрэгжүүлэхийн тулд логарифмын чанарыг мэдэх шаардлагатай. Энэ хэсэгт бид логарифмын чанарууд, тэдгээрийн

баталгаа, чанаруудыг шууд болон хамтад нь ашиглах, логарифмыг хэрэглэн асуудал шийдвэрлэх бодлогуудыг авч үзнэ.

Чанар 1. Үржвэрийн логарифмын чанар

Хэрэв a, b, c эерэг тоонууд ба $a \neq 1$ бол

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$$

$$(\log_a b + \log_a c = \log_a bc)$$

байна.

Баталгаа. $\log_a b = x$, $\log_a c = y$ гэвэл тодорхойлолт ёсоор

$$b = a^x, \quad c = a^y$$

тул

$$b \cdot c = a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

болно. Эндээс

$$b \cdot c = a^{x+y}$$

учир логарифмын тодорхойлолтоор

$$\log_a(b \cdot c) = x + y$$

болох бөгөөд x , y -ийг буцаан орлуулбал

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

болж батлагдана.

Жишээ 1. $\log_8 2 + \log_8 32$ илэрхийллийг хялбарчил.

Бодолт. Үржвэрийн логарифмын чанар ашиглавал $\log_8 2 + \log_8 32 = \log_8(2 \cdot 32) = \log_8 64 = 2$ гэж гарна.

Жишээ 2. $\log_2 10 - \log_2 5$ илэрхийллийг хялбарчил.

Бодолт. Үржвэрийн логарифмын чанар ашиглан

$$\log_2 10 = \log_2(2 \cdot 5) = \log_2 2 + \log_2 5$$

гэж бичиж болох тул

$$\log_2 10 - \log_2 5 = \log_2 2 + \log_2 5 - \log_2 5 = \log_2 2 = 1$$

гэж гарна.

Чанар 2. Ноогдворын логарифмын чанар

Хэрэв a, b, c эерэг тоонууд ба $a \neq 1$ бол

$$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

$$\left(\log_a b - \log_a c = \log_a \left(\frac{b}{c}\right)\right)$$

байна.

Баталгаа. $\log_a b = x$, $\log_a c = y$ гэвэл тодорхойлолт ёсоор

$$b = a^x, \quad c = a^y$$

тул

$$\frac{b}{c} = \frac{a^x}{a^y}$$

болно. Зэргийн чанар ашиглавал

$$\frac{b}{c} = a^{x-y}$$

болох ба логарифмын тодорхойлолтоор

$$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = x - y$$

байна. Энд x , y -ийг буцаан орлуулбал

$$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

болж батлагдана.

Жишээ 2. $\log_3 2 - \log_3 18$ илэрхийллийг хялбарчил.

Бодолт. Ноогдворын логарифмын чанарыг ашиглавал $\log_3 2 - \log_3 18 =$

$$\log_3 \left(\frac{2}{18}\right) = \log_3 \left(\frac{1}{9}\right) = -2 \text{ гэж гарна.}$$

Жишээ 4. $\log_5 9 + \log_5 \left(\frac{25}{9}\right)$ илэрхийллийг хялбарчил.

Бодолт. Ноогдворын логарифмын чанарыг ашиглавал

$$\log_5 \left(\frac{25}{9}\right) = \log_5 25 - \log_5 9$$

болох тул

$$\log_5 9 + \log_5 \left(\frac{25}{9}\right) = \log_5 9 + (\log_5 25 - \log_5 9) = \log_5 25 = 2$$

гэж гарна.

Чанар 3. Зэргийн логарифм

Хэрэв a, b эерэг тоонууд ба $a \neq 1, k \in \mathbb{R}$ бол

$$\log_a(b^k) = k \log_a b$$

$$(k \log_a b = \log_a b^k)$$

байна.

Баталгаа.

$$\log_a b = x, \log_a b^k = y$$

гэвэл

$$a^x = b \text{ ба } a^y = b^k$$

болно. Мөн

$$y = \log_a b^k = \log_a (a^x)^k = \log_a a^{xk}$$

буюу

$$y = \log_a a^{xk}$$

болно. Иймд логарифмын тодорхойлолт ёсоор

$$a^y = a^{xk}$$

байх ба зэргийн чанараар

$$y = xk$$

болно. Энд x, y -ийг буцаан орлуулбал

$$\log_a b^k = k \log_a b$$

болж батлагдана.

Санамж. Хэрэв a нь $a \neq 1$ эерэг тоо ба $k \in \mathbb{R}$ бол $\log_a a^k = k$ байна гэдэг нь

Чанар 4-өөс мөрдөн гарна.

Жишээ 5. $\log_3 6^3 - \log_3 8$ илэрхийллийг хялбарчил.

Бодолт. Зэргийн логарифмын чанар ашиглавал

$$\log_3 6^3 - \log_3 8 = 3\log_3 6 - 3\log_3 2$$

болно. Үржвэрийн логарифмын чанар болон логарифмын тодорхойлолт ёсоор

$$\log_3 6 = \log_3(2 \cdot 3) = \log_3 2 + \log_3 3 = \log_3 2 + 1$$

болох тул

$$3\log_3 6 - 3\log_3 2 = 3(\log_3 2 + 1) - 3\log_3 2 = 3\log_3 2 + 3 - 3\log_3 2 = 3$$

гэж гарна.

Жишээ 6. $2\log_6 \sqrt{5} - \log_6 125$ илэрхийллийг хялбарчил.

Бодолт. Зэргийн логарифмын чанар ашиглавал

$$2\log_6 \sqrt{5} = \log_6 \sqrt{5}^2 = \log_6 5 \text{ ба } \log_6 125 = \log_6 5^3 = 3\log_6 5$$

болох тул

$$2\log_6 \sqrt{5} - \log_6 125 = \log_6 5 - 3\log_6 5 = -2 \log_6 5 = \log_6 \frac{1}{25}$$

гэж гарна.

Жишээ 7. Дараах илэрхийллийг хялбарчил.

а. $1 - \log_5 2 + \log_5 10$

б. $2\lg 3 + \frac{1}{2}\lg 64 - 3\lg \sqrt[3]{6}$

Бодолт. а. $1 - \log_5 2 + \log_5 10 = \log_5 5 - \log_5 2 + \log_5 20 =$

$$= \log_5 \left(\frac{5}{2} \cdot 10\right) = \log_5 25 = 2 \text{ гарна.}$$

б. $2\lg 3 + \frac{1}{2}\lg 64 - 3\lg \sqrt[3]{6} = \lg 3^2 + \lg 64^{\frac{1}{2}} - \lg (\sqrt[3]{6})^3$

$$= \lg 9 + \lg 8 - \lg 6 = \lg \frac{9 \cdot 8}{6} = \lg 12$$

гэж гарна.

Жишээ 8. $6\log_2 \sqrt{3} \log_2 3 - 3(\log_2 3)^2$ илэрхийллийг хялбарчил.

Бодолт. Зэргийн логарифмын чанар ашиглавал $6\log_2 \sqrt{3} = 3\log_2 3$ болох тул

$$6\log_2 \sqrt{3} \log_2 3 - 3(\log_2 3)^2 = 3(\log_2 3)^2 - 3(\log_2 3)^2 = 0$$

гэж гарна.

Санамж. $(\log_2 3)^2 = \log_2 3 \log_2 3$ ба $\log_2 3^2 = \log_2 (3 \cdot 3)$ тул эдгээр нь ялгаатай юм. Иймд $(\log_a b)^k$ ба $\log_a b^k$ гэсэн бичлэгүүдийг ялгаж ойлгох хэрэгтэй. $(\log_a b)^k$ -ийг бас $\log_a^k b$ гэж бичдэг.

Чанар 4. Хэрэв a, b эерэг тоонууд ба $a \neq 1$ бол

$$a^{\log_a b} = b$$

байна.

Баталгаа. $\log_a b = x$ гэвэл логарифмын тодорхойлолт ёсоор

$$a^x = b$$

байна. Иймд энд $x = \log_a b$ гэж орлуулбал

$$a^{\log_a b} = b$$

гэж гарна.

Жишээ 8. $4^{\log_4 5} - 9^{\log_9 4}$ илэрхийллийг хялбарчил.

Бодолт. Чанар 4-ийг ашиглавал $4^{\log_4 5} - 9^{\log_9 4} = 5 - 4 = 1$ гэж гарна.

Жишээ 9. 3-ыг 8 суурьтай зэрэг хэлбэрт бич.

Бодолт. Чанар 4-ийг ашиглан $3 = 8^{\log_8 3}$ гэж бичиж болно.

Жишээ 10. $3^{2 \log_3 4 + \log_3 5 - 3 \log_3 2}$ илэрхийллийг хялбарчил.

Бодолт. Зэргийн илтгэгчид байгаа илэрхийллийг логарифмын чанар ашиглан хялбарчилбал

$$\begin{aligned} 2 \log_3 4 + \log_3 5 - 3 \log_3 2 &= \log_3 16 + \log_3 5 - \log_3 8 = \\ &= \log_3 \frac{16 \cdot 5}{8} = \log_3 10 \end{aligned}$$

болох тул

$$3^{2 \log_3 4 + \log_3 5 - 3 \log_3 2} = 3^{\log_3 10} = 10$$

гэж гарна.

Чанар 5. Хэрэв a, b, c нь нэгээс ялгаатай эерэг тоонууд бол

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

байна.

Баталгаа. $a = b^{\log_b a}$ тул

$$a^{\log_b c} = (b^{\log_b a})^{\log_b c} = (b^{\log_b c})^{\log_b a} = c^{\log_b a}$$

байна.

Чанар 6. Логарифмын суурь солих чанар

Хэрэв a, b, c нь эерэг тоо ба $a \neq 1, c \neq 1$ бол

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

байна.

Баталгаа. $a^x = b$ гээд хоёр талаас нь c сууриар логарифмчилбал

$$\log_c a^x = \log_c b$$

болно. Чанар 3-аар $x \log_c a = \log_c b$ байна. $a^x = b$ тул $x = \log_a b$ болох ба үүнийг орлуулбал

$$\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b$$

гэж гарна. Эндээс

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

болж батлагдана.

Санамж. Хэрэв a, b нь эерэг тоо ба $a \neq 1$ бол

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}$$

байна. Эндээс $\log_a b \cdot \log_b a = 1$ гэж мөрдөн гарна.

Жишээ 11. $\log_3 5$ -ийг 2 суурьтай логарифмоор илэрхийл.

Бодолт. Логарифмын суурь солих чанар ёсоор $\log_3 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 3}$ болно.

Жишээ 12. $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5$ илэрхийллийг хялбарчил.

Бодолт. Суурь солих чанар ёсоор

$$\log_3 4 = \frac{\log_2 4}{\log_2 3} \text{ ба } \log_4 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 4}$$

болно. Иймд

$$\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 = \log_2 3 \cdot \frac{\log_2 4}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 4} = \log_2 5$$

гэж гарна.

Жишээ 13. Хэрэв $\lg 2 = a$, $\lg 3 = b$ бол дараах логарифмуудыг a, b -ээр илэрхийл.

а) $\lg(1.08)$

б) $\lg(\sqrt{30})$

Бодолт. а) $\lg(1.08) = \lg\left(\frac{108}{100}\right) = \lg 108 - \lg 100 =$

$$= \lg(2^2 \cdot 3^3) - \lg 10^2 = \lg 2^2 + \lg 3^3 - \lg 10^2 =$$

$$= 2 \lg 2 + 3 \lg 3 - 2 = 2a + 3b - 2$$

гэж гарна.

б) $\lg\sqrt{30} = \lg(\sqrt{3} \cdot 10) = \lg\sqrt{3} + \lg 10 = \frac{1}{2}\lg 3 + 1 = \frac{1}{2}b + 1$

гэж гарна.

Жишээ 14. Хэрэв $\log_2 3 = a$, $\log_2 7 = b$ бол $\log_{42} 56$ логарифмыг a, b -ээр илэрхийл.

Бодолт. $\log_{42} 56 = \frac{\log_2 56}{\log_2 42} = \frac{\log_2(2^3 \cdot 7)}{\log_2(2 \cdot 3 \cdot 7)} = \frac{\log_2 2^3 + \log_2 7}{\log_2 2 + \log_2 3 + \log_2 7} = \frac{3+b}{1+a+b}$ болно.

Жишээ 15. Хэрэв $10^x = a$, $10^y = b$, $10^z = c$ бол $\log_{ab} c^2$ илэрхийллийг x, y, z -ээр илэрхийл.

Бодолт. $10^x = a$, $10^y = b$, $10^z = c$ тэнцэтгэл тус бүрийг логарифмын тодорхойлолт ашиглан

$$\lg a = x, \lg b = y, \lg c = z$$

гэж бичиж болно. Иймд

$$\log_{ab} c^2 = \frac{\lg c^2}{\lg ab} = \frac{2 \lg c}{\lg a + \lg b} = \frac{2z}{x + y}$$

гэж гарна.

Жишээ 16. Хэрэв $25^x = 16^y = 20$ нөхцөл биелдэг бол $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ илэрхийллийн утгыг ол.

Бодолт. Өгсөн нөхцлөөс $25^x = 20$ ба $16^y = 20$ болох ба эдгээрийг логарифмын тодорхойлолт ашиглан

$$x = \log_{25} 20 \text{ ба } y = \log_{16} 20$$

гэж бичиж болно. Логарифмын суурь солих чанараар $\log_a b \cdot \log_b a = 1$ байхыг санавал

$$\log_{25} 20 \cdot \log_{20} 25 = 1 \text{ буюу } x \cdot \log_{20} 25 = 1$$

тул $\frac{1}{x} = \log_{20} 25$ байна. Үүнтэй адилаар $\frac{1}{y} = \log_{20} 16$ болох тул

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \log_{20} 25 + \log_{20} 16 = \log_{20} 400 = 2$$

гэж гарна.

Чанар 7. Хэрэв a, b нь эерэг тоо ба $a \neq 1, m \neq 0$ бодит тоо бол

$$\log_{a^m} b = \frac{1}{m} \log_a b$$

байна.

Баталгаа. $\log_{a^m} b$ -ийг a суурьтай логарифмаар илэрхийлбэл

$$\log_{a^m} b = \frac{\log_a b}{\log_a a^m}$$

болох ба эндээс

$$\log_{a^m} b = \frac{\log_a b}{m \log_a a} = \frac{1}{m} \log_a b$$

болж батлагдана.

Жишээ 17. $\log_{2^3} 7^5$ илэрхийллийг хялбарчил.

Бодолт. Чанар 3 ба Чанар 7 ёсоор $\log_{2^3} 7^5 = \frac{5}{3} \log_2 7$ болно.

Жишээ 18. Хэрэв x, y, z эерэг тоонуудын хувьд $\log_2 x + 2 \log_4 y + 3 \log_8 z = 1$ нөхцөл биелдэг бол 2^{xyz} илэрхийллийн утгыг ол.

Бодолт. Чанар 7 ёсоор

$$2 \log_4 y = 2 \log_{2^2} y = 2 \cdot \frac{1}{2} \log_2 y = \log_2 y, \quad 3 \log_8 z = 3 \cdot \frac{1}{3} \log_2 z = \log_2 z$$

болно. Иймд

$$\log_2 x + 2 \log_4 y + 3 \log_8 z = \log_2 x + \log_2 y + \log_2 z = \log_2(xyz)$$

болох тул өгсөн нөхцлийг

$$\log_2(xyz) = 1$$

гэж бичиж болно. Эндээс $xyz = 2$ гэж гарах тул $2^{xyz} = 2^2 = 4$ гэж гарна.

Үзэгдэл, үйл явцыг загварчлахад 10 суурьтай логарифмыг түгээмэл ашигладаг. Иймд тооны 10 суурьтай логарифмыг олох нь чухал бөгөөд үүнийг олоход хэрэгтэй нэгэн өгүүлбэрийг авч үзье.

M гэсэн эерэг тооны 10 суурьтай логарифм $\lg M$ -ийн утгыг

$$\lg M = k + \lg a \quad (k\text{-бүхэл тоо, } 1 \leq a < 10)$$

хэлбэрээр илэрхийлж болно.

Санамж. $895 = 8.95 \cdot 10^2$, $0.00247 = 2.47 \cdot 10^{-3}$ гэж бичиж болох тухай бид дунд ангид судалсан. Өөрөөр хэлбэл, эерэг M гэсэн тоог

$$M = a \cdot 10^k \quad (k\text{-бүхэл тоо, } 1 \leq a < 10)$$

хэлбэртэй бичиж болох тул

$$\lg M = \lg(a \cdot 10^k) = \lg a + \lg 10^k = k + \lg a$$

гэж бичиж болно. Энд $1 \leq a < 10$ тул $0 \leq \lg a < 1$ байна.

Ийм хэлбэрээр бичих нь ямар ч эерэг тооны 10 суурьтай логарифмыг олоход хэрэгтэй юм. $1 \leq a < 10$ тооны хувьд таблиц, тооны машин зэргийг ашиглан хялбар олж болох ба үүнийг хавсралтаас хараарай.

Жишээ 19. $\lg 5.73 = 0.7582$ гэж үзээд $\lg 57.3$, $\lg 573$, $\lg 5730$, $\lg 0.573$, $\lg 0.0573$ логарифмуудын утгыг ол.

Бодолт. $\lg 57.3 = \lg(10 \cdot 5.73) = 1 + \lg 5.73 = 1 + 0.7582 = 1.7582$

$$\lg 573 = \lg(10^2 \cdot 5.73) = 2 + \lg 5.73 = 2 + 0.7582 = 2.7582$$

$$\lg 5730 = \lg(10^3 \cdot 5.73) = 3 + \lg 5.73 = 3 + 0.7582 = 3.7582$$

$$\lg 0.573 = \lg(10^{-1} \cdot 5.73) = -1 + \lg 5.73 = -1 + 0.7582 = -0.2418$$

$$\lg 0.0573 = \lg(10^{-2} \cdot 5.73) = -2 + \lg 5.73 = -2 + 0.7582 = -1.2418 \text{ гэж гарна.}$$

Санамж. $\lg M = k + \lg a$ ба $0 \leq \lg a < 1$ тул

Хэрэв $M \geq 10$ тоо бол $k \leq \lg M < k + 1$ буюу $10^k \leq M < 10^{k+1}$

Хэрэв $0 < M < 10$ бол $-k \leq \lg M < -k + 1$ буюу $10^{-k} \leq M < 10^{-k+1}$

байна.

Жишээ 20. $\lg 2 = 0.3010$ ба $\lg 3 = 0.4771$ гэж үзээд 6^{52} нь хэдэн оронтой тоо болохыг тогтоо.

Бодолт. $\lg 6^{52} = 52(\lg 2 + \lg 3) = 52(0.3010 + 0.4771) = 40.4612 = 40 + 0.4612$ болно. Иймд $40 \leq \lg 6^{52} < 41$ байх тул 6^{52} нь 41 оронтой байна.

Жишээ 21. $\lg 2 = 0.3010$ гэж үзээд $\left(\frac{1}{5}\right)^{100}$ тооны хувьд таслалаас хойш хамгийн анхны 0-ээс ялгаатай цифр нь хэд дэх орон байхыг ол.

Бодолт. $\lg \left(\frac{1}{5}\right)^{100} = 100(\lg 2 - \lg 10) = 100(0.3010 - 1) =$
 $= -69.90 = -69 - 0.90 = (-69 - 1) + (1 - 0.90) = -70 + 0.10$

тул таслалаас хойш 70 дахь орон нь тэгээс ялгаатай байна.

Жишээ 22. Шингэний анхны температур T_1 байсан ба T_0 температуртай тасалгаанд t минут байлгасны дараах температур нь T бол дараах хамааралтай өөрчлөгддөг болохыг ажиглажээ (температурын нэгж нь $^{\circ}\text{C}$).

$$T = T_0 + (T_1 - T_0)10^{-0.02t}$$

120°C анхны температуртай шингэнийг 20°C температуртай тасалгаанд хэдэн минут байлгахад шингэний температур 25°C болох вэ? Тасалгааны температурыг тогтмол гэж үзэх ба $\lg 2 = 0.3$ гэж ав.

Бодолт. $T_1 = 120^{\circ}\text{C}$, $T_0 = 20^{\circ}\text{C}$, $T = 25^{\circ}\text{C}$ тул эдгээрийг $T = T_0 + (T_1 - T_0)10^{-0.02t}$ тэгшитгэлд орлуулахад

$$25 = 20 + (120 - 20)10^{-0.02t} \text{ буюу } 10^{-0.02t} = \frac{1}{20}$$

тэгшитгэл гарна. Үүнийг логарифмын тодорхойлолт ашиглан

$$-0.02t = \lg \frac{1}{20}$$

гэж бичиж болно.

$$\lg \frac{1}{20} = -\lg 20 = -\lg(2 \cdot 10) = -(\lg 2 + \lg 10) = -(0.3 + 1) = -1.3$$

гэж олдох тул $-0.02t = -1.3$ тэгшитгэлээс $t = 65$ гэж олдоно. Өөрөөр хэлбэл 65 минутын дараа шингэний температур 25°C болно.

Жишээ 23. Нэгэн үйлдвэрийн агааржуулагч нь тасалгааны тоосжилтын хэмжээ 1 м^3 тутамд 200 мкг ($1 \text{ мкг} = 10^{-6} \text{ г}$) хүрэхэд автоматаар ажилладаг. Энэ агааржуулагч автоматаар ажиллаж эхэлснээс t секундын дараа 1 м^3 тутам дахь тоосжилтын хэмжээ $x(t)$ нь

$$x(t) = 20 + 180 \cdot 3^{-\frac{t}{256}} \quad (\text{мкг/м}^3)$$

хуулиар өөрчлөгддөг. Тоосжилтын хэмжээ 50 мкг/м^3 болоход агааржуулагч автоматаар амарна. Ямар хугацааны дараа тасалгааны тоосжилтын хэмжээ нь 50 мкг/м^3 болох вэ? $\lg 2 = 0.30, \lg 3 = 0.48$ гэж ав.

Бодолт. $x(t) = 50 \text{ мкг/м}^3$ тул

$$50 = 20 + 180 \cdot 3^{-\frac{t}{256}} \quad \text{буюу} \quad 3^{-\frac{t}{256}} = \frac{1}{6}$$

тэгшитгэл гарна. Энэ нь логарифмын тодорхойлолтоор $-\frac{t}{256} = \log_3 \frac{1}{6}$ байна.

$$\log_3 \frac{1}{6} = -\log_3 6 = -(\log_3 3 + \log_3 2) = -\left(1 + \frac{\lg 2}{\lg 3}\right) = -(1 + 0.625) = -1.625$$

тул $-\frac{t}{256} = -1.625$ тэгшитгэлээс $t = 416$ гэж олдоно. Өөрөөр хэлбэл 416 секундын дараа тасалгааны тоосжилтын хэмжээ 50 мкг/м^3 болно.

Дасгал

6. Дараах илэрхийллийг хялбарчил.

а. $\log_3 72 + 3\log_3 \frac{3}{2}$

б. $\frac{1}{3}\log_3 125 + \log_2 \frac{1}{5}$

в. $\log_3 8 \log_2 3$

г. $\log_7 9 \log_9 11 \log_{11} 7$

д. $\log_{\frac{1}{10}} \sqrt{1000} + 3$

е. $4^{\log_{16} 3}$

ё. $\log_2 4\sqrt{3} + \log_2 6 - \frac{3}{2}\log_2 3$ ж. $(\log_2 \sqrt{3} + \frac{3}{4}\log_{\sqrt{2}} 3) \cdot \log_9 (2\sqrt{2})$

7. Дараах илэрхийллийг хялбарчил.

а. $(\log_3 5 + \log_{27} 25)(\log_5 3 + \log_{25} 27)$ б. $9^{2\log_3 5 - 3\log_{\frac{1}{3}} 4 - 2\log_3 20}$

в. $(3^{\log_3 4 + \log_3 2})^2 + (2^{\log_3 4 + \log_3 2})^{\log_2 3}$

г. $\log_5 (\log_3 2) + \log_5 (\log_4 3) + \log_5 (\log_5 4) + \dots + \log_5 (\log_{32} 31)$

8. $\lg 2.54 = 0.4048$ гэж үзээд дараах логарифмын утгыг ол.

а. $\lg 25.4$

б. $\lg 254$

в. $\lg 25400$

г. $\lg 0.254$

д. $\lg 0.0254$

е. $\lg 0.0254$

9. Хэрэв $\lg 2 = a, \lg 3 = b$ бол дараах логарифм тус бүрийг a, b -ээр илэрхийл.

- а. $\lg 144$ б. $\lg \frac{64}{243}$ в. $\lg 600$
г. $\lg 25$ д. $\log_{0.1}(2\sqrt{6})$

10. Хэрэв $\log_5 2 = a$, $\log_5 3 = b$ бол дараах логарифм тус бүрийг a, b -ээр илэрхийл.

- а. $\log_9 4$ б. $\log_{12} 24$ в. $\log_4 30$ г. $\log_2 3$

11. Хэрэв $\log_a 3 = 2$ ба $\log_3 5 = b$ бол a^b илэрхийллийн утгыг ол.

12. Хэрэв $a = \log_3 6$ бол 81^a илэрхийллийн утгыг ол.

13. Хэрэв $\log_2 15 = a$, $\log_2 \frac{9}{5} = b$ бол $\log_2 75$ -ийг a, b -ээр илэрхийл.

14. Хэрэв $\log_2 3 = a$, $\log_3 5 = b$, $\log_5 7 = c$ бол $\log_{14} 105$ -ийг a, b -ээр илэрхийл.

15. Хэрэв $3^a = x$, $3^b = y$, $3^c = z$ бол $\log_{xy} y^2 z^3$ -ийг a, b, c -ээр илэрхийл ($abc \neq 0$)

16. Хэрэв $4^x = a$, $4^y = b$, $4^z = c$ үед $\log_2 \frac{a^2 b^4}{\sqrt{c}} = px + qy + rz$ байдаг бол p, q, r бодит тоонуудын үржвэрийг ол.

17. Хэрэв $32^x = 243^y = 216$ бол $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ илэрхийллийн утгыг ол.

18. Хэрэв a, b эерэг бодит тооны хувьд $\log_6(3a^2 + b^2) - \log_6(a + b) = \log_6(a + 3b)$ нөхцөл биелдэг бол $\frac{a}{b}$ -г ол.

19. Хэрэв $10^a = 125$, $2^b = 625$ бол $\frac{3}{a} - \frac{4}{b}$ илэрхийллийн утгыг ол.

20. $\frac{\log_2 18}{\log_{36} 2} - \frac{\log_2 9}{\log_{72} 2}$ илэрхийллийн утгыг ол.

21. $3^{\frac{1}{\log_7 3}} - \log_{\sqrt{5}} \frac{1}{25}$ илэрхийллийн утгыг ол.

22. Хэрэв $\log_2(\log_3(\log_4 k)) = 0$ бол k тоог ол.

23. Хэрэв $x = \log_5 \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$ бол $5^x - 5^{-x}$ илэрхийллийн утгыг ол.

24. $\sqrt{\log_2^2 10 - \log_2 625}$ илэрхийллийн утгыг ол.

25. Хэрэв x, y эерэг бодит тооны хувьд $\log_9 x = \frac{1}{\log_{125} 5}$, $\log_{\sqrt{3}} y = \frac{1}{\log_{64} 2}$ бол $\log_x y$ илэрхийллийн утгыг ол. ($x \neq 1$)

26. Хэрэв a, b эерэг бодит тооны хувьд $a \log_2 5 = 2$, $\log_2 b = \log_2(\log_5 2) + 1$ нөхцөл биелдэг бол $a + b = \log_5 k$ бол k эерэг тоог ол.

27. Хэрэв a, b эерэг бодит тооны хувьд $a^3 b^2 = 1$ бол $\log_a a^5 b^3$ илэрхийллийн утгыг ол.
28. Хэрэв x, y эерэг бодит тооны хувьд $\log_2 x + \log_4 y^2 = 2$ нөхцөл биелдэг бол $4^{\log_2 x} \cdot 2^{\log_{\sqrt{2}} y}$ илэрхийллийн утгыг ол.
29. Хэрэв тэгээс их a, b бодит тооны хувьд $a^3 b^2 = 1$ бол $\log_a a^5 b^3$ илэрхийллийн утгыг ол.
30. Хэрэв 1-ээс их a, b, c бодит тооны хувьд $\log_a b : \log_c b = 1:3$ бол $\log_a c + \log_c a$ илэрхийллийн утгыг ол.
31. Хэрэв эерэг бодит a, b, c тооны хувьд $\log_2 a + \log_2 c = \log_{\sqrt{2}} b$ бол $\log_2(a+b) + \log_2(b-c) - \log_2(a-b) - \log_2(b+c)$ илэрхийллийн утгыг ол ($a > b > c$).
32. Хэрэв 1-ээс ялгаатай, эерэг бодит x тооны хувьд $\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_6 x} = \frac{2}{\log_a x}$ нөхцөл биелдэг бол a эерэг тоог ол ($a \neq 1$).
33. Хэрэв $\log_5 3 \cdot \log_a 2a \cdot \log_{2a} 4a = \log_5 9$ бол a эерэг тоог ол.
34. $\log_{\sqrt{2}}(6x - 8 - x^2 - y^2)$ логарифм утгатай байх бодит x, y тоогоор тодорхойлогдох хавтгайн цэгүүдийн олонлогийг $M(x, y)$ гэе. M цэгийн геометр байрыг тодорхойлж, уг дүрсийн талбайг ол.
35. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ үед $\log_2 \cos x + \log_a \left(\frac{1+\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1+\sin x} \right)$ илэрхийллийн утгыг ол.
36. 216-ийн бүх эерэг хуваагчдыг a_1, a_2, \dots, a_{16} , гэвэл $\log_6 a_1 + \log_6 a_2 + \log_6 a_3 + \dots + \log_6 a_{16}$ илэрхийллийн утгыг ол.
37. Хэрэв 1-ээс их a, b бодит тооны хувьд
$$\begin{pmatrix} \log_a b & 1 \\ 2 & \log_a 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \log_b 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
 нөхцөл биелдэг бол ab үржвэрийг ол.
38. Хэрэв ABC гурвалжны гурван талын урт нь a, b, c ба тэдгээр нь $\log_c(a+b) + \log_c(a-b) = 2$ хамааралтай бол ABC нь ямар гурвалжин болохыг тогтоо ($a > b, c \neq 1$).
39. ABC гурвалжны $AB = 3, AC = 2$ байв. A оройн биссектрис BC талтай огтлолцсон цэгийг D гэвэл $BD = \log_3 x, CD = \log_9 y$ байв. Хэрэв x, y эерэг бодит тооны хувьд $x = y^k$ бол k тогтмол тоог ол.

40. Дараах тоонуудын хувьд таслалаас хойш хамгийн анхны 0-ээс ялгаатай цифр нь хэд дэх орон байх вэ?

а. $(0.5)^{30}$ б. 6^{-20} в. $\sqrt[3]{0.0002}$

41. Хэрэв 3^{100} нь a оронтой тоо ба $\left(\frac{1}{2}\right)^{200}$ -ийн таслалаас хойшхи b дүгээр цифр нь хамгийн анхны тэгээс ялгаатай цифр байдаг бол $a + b$ нийлбэрийг ол. Энд $\lg 2 = 0.3010, \lg 3 = 0.4771$ гэж ав.

42. 3^n нь 30 оронтой бол n натурал тоог ол. $\lg 3 = 0.48$ гэж ав.

43. 6^{100} ба 11^{100} тоонууд нь харгалзан 78 ба 105 оронтой тоонууд гэсэн нөхцлийг ашиглан 66^{10} нь хэдэн оронтой болохыг тогтоо.

44. Хэрэв a натурал тооны хувьд a^{20} нь 100 оронтой тоо, $\frac{1}{a^5}$ -ийн таслалаас хойш n дэх орон нь хамгийн анхны тэгээс ялгаатай цифр байдаг бол n -ийг ол.

45. Нэгэн хотын хүн амын тоо жил бүр тогтмол хувиар өсдөг ба 15 жилийн дотор 3 дахин их хүн амтай болсон. Энэ 15 жилийн хугацаанд хотын хүн ам жил бүр хэдэн хувиар өссөн бэ? ($\lg 1.077 = 0.032, \lg 3 = 0.48$ гэж ав.)

46. Гар утас үйлдвэрлэдэг нэгэн компанийн жилийн орлого нь 2004 онд 10 сая доллар байсан ба үүнээс хойш жилийн орлого нь тогтмол хувиар өсч 2012 онд 100 сая доллар болсон байв. Энэ компанийн жилийн орлого нь жил бүр хэдэн хувиар өссөн бэ?

47. Газар хөдлөлтийн хүчийг магнитуд, энерги, балл гэсэн хэмжигдэхүүнүүдээр тодорхойлдог. Магнитуд нь газар хөдлөлийн хүчийг газар хөдлөлт бүртгэх багажинд бичигдсэн хөрсний шилжилтийн утгаар тодорхойлдог хэмжигдэхүүн юм. Энэхүү тооцооны аргыг боловсруулан анхны томъёололыг 1935 онд АНУ эрдэмтэн Рихтер гаргасан ба үүнийг Рихтерийн магнитуд гэж нэрлэдэг байна. Газар хөдлөлийн энерги E болон магнитуд M нь

$$\lg E = 11.8 + 1.5 M$$

гэсэн хамааралтай байдаг. Тэгвэл 5 магнитуд газар хөдлөлийн энерги нь 4 магнитуд газар хөдлөлийн энергээс хэд дахин их байх вэ?

48. Оддыг гэрэлтэлтээс нь хамааруулан ангилах оролдлого МЭӨ 2 дугаар зуунд эхэлсэн ба Грекийн эрдэмтэн Гиппарх (Hipparchus) 1000-аад одыг 6 ангид хуваасан байдаг. Одны гэрэлтэлтийн хэмжээг магнитуд гэсэн хэмжигдэхүүнээр тодорхойлдог. Одны магнитуд m ба одноос дэлхийд ирэх гэрлийн хүч I (Watt/m^2) нь

$$m = -\frac{5}{2} \log I + C \quad (C \text{ нь тогтмол тоо})$$

хамааралтай болохыг 1856 (Норман Погсон) онд тогтоожээ. Тэгвэл 2 магнитудтай одноос дэлхийд ирэх гэрлийн хүч нь 5 магнитудтай одныхоос хэд дахин их болохыг ол. $\sqrt{100} = \frac{5}{2}$ гэж ав.

49. Газрын тос боловсруулдаг үйлдвэр газрын тосныхоо нөөцийг жил бүр тогтмол хувиар ихэсгэсээр 20 дахь жилд нөөцлөх хэмжээ нь нөөцөлж эхэлсэн жилийнхээс 2 дахин их байлгах зорилго тавьсан. Тэгвэл газрын тосны нөөцийн хэмжээг жил бүр хэдэн хувиар ихэсгэх хэрэгтэй вэ? $\lg 1.035 = 0.015, \lg 2 = 0.3$ гэж ав.
50. Тогтмол температурт бактерийн бүлийг өсгөвөл 10 минут тутамд тоо нь 3 дахин нэмэгддэг. Бактерын тоо нь анх 10 байсан ба 3 цагийн дараа бактерийн тоог ойролцоогоор 10^k болно гэвэл k бүхэл тоог ол. $\lg 3 = 0.5$ гэж тооц.
51. Нэгэн хотод шинээр төрсөн хүүхдийн хүйсийн харьцаа нь 2017 онд 1:1 байв. Хэрэв цаашид шинээр төрөх хүүхдийн тоо жил бүр 7%-аар, шинээр төрөх эрэгтэй хүүхдийн тоо жил бүр 10%-аар өснө гэвэл 10 жилийн дараа шинээр төрсөн 100 хүүхдийн хэд нь эрэгтэй байх вэ? ($\lg 1.07 = 0.0294, \lg 1.1 = 0.0414, \lg 1.32 = 0.12$ гэж ав.)
52. A, B нь $A = \{a, b, c, d\}, B = \{\log_2 a, \log_2 b, \log_2 c, \log_2 d\}$ гэсэн натурал тоон олонлогийн дэд олонлогууд байв. Хэрэв $A \cap B = \{a, b\}$ ба $a + b = 12$ бол $d - c$ ялгаврыг ол.
53. $\frac{1}{10} \leq N \leq 10^2$ байх N тооны 10 суурьтай логарифмыг $\lg N = k + \lg a$ (k -бүхэл тоо, $1 \leq a < 10$) хэлбэрт бичсэн гээ. Тэгвэл x, y -ээс хамаарсан

$$\begin{pmatrix} a & k \\ 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -kx \\ y \end{pmatrix}$$

тэгшитгэл $x = y = 0$ гэсэн шийдээс гадна өөр шийдтэй байх бүх бодит N тооны нийлбэрийг ол.

54. C орой дахь өнцөг нь 120° байх ABC гурвалжны талууд a, b, c урттай ба эдгээр нь хоорондоо $\log_2 a - \log_2 b = 1$ хамааралтай бол $\log_2 a + \log_2 b - 2 \log_2 c$ илэрхийллийн утгыг ол.
55. Гурван зэргийн олон гишүүнт $P(x)$ -ийн ахмад гишүүний коэффициент нь 1-тэй тэнцүү байв. $P(x)$ -ийг $(x - \lg 8)$ -д хуваахад гарах үлдэгдэл нь $\lg 8$, $(x + \lg 4)$ -д хуваахад гарах үлдэгдэл нь $\lg \frac{1}{4}$, $(x - \lg 2)$ -д хуваахад гарах үлдэгдэл нь $\lg 2$ гардаг ба $(x - \lg 16)$ -д хуваахад $a(\lg^2 2)^3 + b \lg 2$ бол a, b натурал тоог ол.
56. Хэрэв a, b эерэг тоонуудын хувьд $\frac{b}{a} = 9$ ба $a^{\log_3 b} = \sqrt[3]{3}$ бол $(\log_3 a)^3 - (\log_3 b)^3$ илэрхийллийн утгыг ол.
57. Хэрэв x нь a оронтой, y нь b оронтой натурал тоо ба x^3 нь 15 оронтой, xy^2 нь 20 оронтой тоо байв. Тэгвэл $a + b$ нийлбэрийг ол.

3.3. Хялбар илтгэгч тэгшитгэл, тэнцэтгэл биш

Өмнөх ангиудад бид хялбар илтгэгч тэгшитгэл, тэнцэтгэл бишийг зэргийн чанар ашиглаж бодохоос гадна графикийн аргаар бодож байсан. Тухайлбал, $5^x = \frac{1}{125}$ тэгшитгэлийн шийдийг графикийн аргаар болон зэргийн чанар ашиглан $x = -3$ гэж олж чадна. Гэвч $5^x = 2$ гэсэн тэгшитгэлийн шийдийг зэргийн чанар ашиглан олж чадахгүй, гэхдээ графикийн арга ашиглан шийдийг ойролцоогоор $x \approx 0.43$ гэж олж болох юм. Одоо бид логарифмын тодорхойлолт, чанар ашиглан $5^x = 2$ тэгшитгэлийн шийдийг ойролцоогоор биш яг зөв олох болно.

$a^x = b$ ($a > 0$, $a \neq 1$) тэгшитгэл

$a^x = b$ ($a > 0$, $a \neq 1$) тэгшитгэлийг графикийн аргаар бодох нь

$$y = a^x \text{ ба } y = b$$

муруйнуудын огтлолцлын цэгийн абсциссыг олохтой адил гэдгийг бид мэднэ.

Харин логарифмын тодорхойлолт ашиглавал шийд нь

$$x = \log_a b$$

гэж гарна. Өөрөөр хэлбэл,

$$y = a^x \text{ ба } y = b$$

муруй ба шулууны огтлолцлын цэгийн абсцисс нь

$$x = \log_a b$$

байна.

Тухайлбал, $5^x = 2$ тэгшитгэлийн шийд нь $x = \log_5 2$ гэж олдох ба энэ нь $y = 5^x$ ба $y = 2$ муруйнуудын огтлолцлын цэгийн абсцисс юм.

Санамж. Тооны машин ашиглан $\log_5 2$ логарифмын утгыг ойролцоогоор олж болно.

Хэрэв $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ бодит тоо бол $a^x = b$ тэгшитгэлийн шийд нь

$$x = \log_a b$$

байна.

Жишээ 1. а. $2^x = 3$, б. $2^x = 5$, в. $2^x = 0.5$ тэгшитгэлийн шийдийг логарифм ашиглан ол.

Бодолт. а. $x = \log_2 3$ б. $x = \log_2 5$ в. $x = \log_2 0.5 = -1$ гэж олдоно.

Жишээ 2. $y = 3^x$ ба $y = -3$ функцийн графикууд огтлолцох уу? Хэрэв огтлолцох бол огтлолцлын цэгийн абсциссыг ол.

Бодолт. $y = 3^x$ ба $y = -3$ функцийн графикуудын огтлолцлын цэгийн абсциссыг олно гэдэг нь $3^x = -3$ тэгшитгэлийн шийдийг олохтой адил. $3^x = -3$ нөхцлийг хангах x тоо олдохгүй тул өгсөн хоёр функцийн график огтлолцохгүй.

Жишээ 3. $6^{x-1} = 4$ тэгшитгэл бод.

Бодолт. Тодорхойлолт ёсоор $x - 1 = \log_6 4$ болох ба эндээс $x = \log_6 4 + 1$ гэж гарна. Логарифмын чанарууд ашиглавал $\log_6 4 + 1 = \log_6 24$ гэж гарах тул $x = \log_6 24$ болно.

Жишээ 4. $9^x + 3^x - 6 = 0$ тэгшитгэлийг бод.

Бодолт. Хэрэв $3^x = u$ ($u > 0$) гэвэл $9^x = u^2$ тул $u^2 + u - 6 = 0$ тэгшитгэлд шилжинэ. Эндээс $u = 2$ эсвэл $u = -3$ гэж гарна. $u = -3$ үед $3^x = -3$ байх x -ийн утга олдохгүй ба $u = 2$ үед $3^x = 2$ гэдгээс $x = \log_3 2$ гэж олдоно.

Жишээ 5. $5^x - \frac{4}{5^x} = 3$ тэгшитгэл бод.

Бодолт. Хэрэв $5^x = u$ ($u > 0$) гэвэл $u - \frac{4}{u} = 3$ буюу $u^2 - 3u - 4 = 0$ тэгшитгэлд шилжнэ. Эндээс $u = 4$ эсвэл $u = -1$ гэж гарна. Иймд $u = 4$ үед $5^x = 4$ гэдгээс $x = \log_5 4 = 2 \log_5 2$ гэж олдоно.

$a^x < b$ ($a > 0$, $a \neq 1$) тэнцэтгэл биш

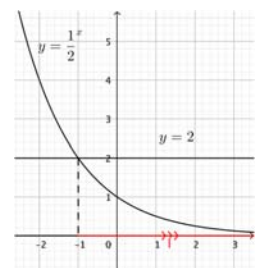
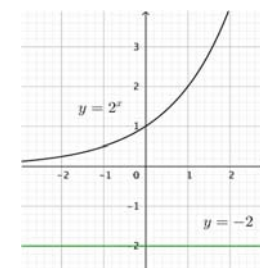
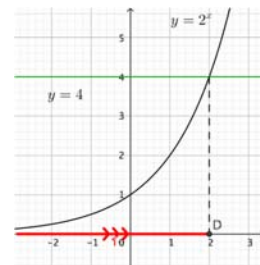
Жишээ 6. а. $2^x < 4$ б. $2^x \leq 4$ в. $2^x < -2$ г. $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 2$ тэнцэтгэл бишийг график ашиглан бод.

Бодолт. а. $y = 2^x$ муруй дээрх цэгүүдийн хувьд ординат нь 4-өөс бага байх цэгүүдийн абсциссыг олох бодлоготой адил гэдгийг бид мэднэ. Өөрөөр хэлбэл $y = 4$ шулуунаас доош орших $y = 2^x$ муруйн цэгүүдийн абсциссыг олно гэсэн үг. Муруй ба шулууны огтлолцлын цэгийн абсцисс нь $2^x = 4$ гэсэн тэгшитгэлээс $x = 2$ гэж олдох тул $2^x < 4$ тэнцэтгэл бишийн шийд нь $x < 2$ буюу $x \in]-\infty, 2[$ байна.

б. Харин $2^x \leq 4$ тэнцэтгэл бишийн шийдийн олонлог нь $] -\infty, 2]$ байна.

в. $2^x < -2$ тэнцэтгэл биш нь шийдгүй болохыг дараагийн зургаас харж болно. Учир нь $y = 2^x$ функцийн дүр нь эерэг бодит тоон олонлог байна.

г. $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 2$ тэнцэтгэл бишийн шийд нь $x > -1$ буюу $x \in]-1, \infty[$ олонлог байна.



Эндээс бид $a^x < b$, $a^x \leq b$ хэлбэрийн тэнцэтгэл бишийн шийдийг хэрхэн олох талаар төсөөлж болно. Эхний алхам нь $a^x = b$ тэгшитгэлийн шийдийг $x = \log_a b$ гэж олно. Дараагийн алхам нь зэргийн суурь нь 1-ээс их эсэхийг шалгана. Үүний дараа тэнцэтгэл бишийн шийдийг дараах дүрмээр олно.

Хэрэв $a > 1$ тоо бол $b > 0$ бодит тоо бол

$$a^x < b \quad (a^x \leq b)$$

тэнцэтгэл бишийн шийд нь

$$x < \log_a b \quad (x \leq \log_a b)$$

байна.

Хэрэв $0 < a < 1$ ба $b > 0$ бодит тоо бол

$$a^x < b \quad (a^x \leq b)$$

тэнцэтгэл бишийн шийд нь

$$x > \log_a b \quad (x \geq \log_a b)$$

байна.

$a > 0, a \neq 1, b \leq 0$ бодит тоо бол $a^x < b$ ($a^x \leq b$) тэнцэтгэл биш шийдгүй.

Жишээ 7. а. $6^x \leq 2$ б. $\left(\frac{1}{5}\right)^x < 2$ в. $\left(\frac{1}{3}\right)^x < -3$ тэнцэтгэл бишийг бод.

Бодолт. а. Зэргийн суурь нь 1-ээс их ба $6^x = 2$ тэгшитгэлийн шийд нь $x = \log_6 2$ тул $6^x \leq 2$ тэнцэтгэл бишийн шийд нь $x \leq \log_6 2$ гэж гарна.

б. Зэргийн суурь нь 1-ээс бага ба $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 2$ тэгшитгэлийн шийд нь $x = \log_{\frac{1}{5}} 2 = -\log_5 2$ тул $\left(\frac{1}{5}\right)^x < 2$ тэнцэтгэл бишийн шийд нь $x > -\log_5 2$ гэж гарна.

в. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ функцийн дүр нь эерэг бодит тоон олонлог буюу бүх бодит x -ийн хувьд $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 0$ тул $\left(\frac{1}{3}\right)^x < -3$ тэнцэтгэл биш шийдгүй.

Жишээ 8. $5^{3x+1} < 135$ тэнцэтгэл бишийг бод.

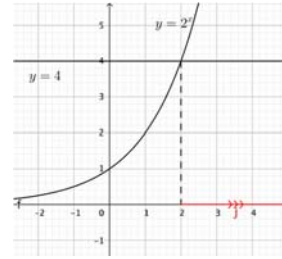
Бодолт. Зэргийн суурь нь 1-ээс их тул $3x + 1 < \log_5 135$ тэнцэтгэл биш биелнэ. Эндээс $3x < \log_5 135 - 1$ буюу $x < \frac{1}{3}(\log_5 135 - 1)$ гэж олдоно.

Логарифмын чанар ашиглан $\frac{1}{3}(\log_5 135 - 1) = \frac{1}{3}\log_5 \frac{135}{5} = \frac{1}{3}\log_5 27 = \log_5 3$ гэж хялбарчилж болно. Иймд шийд нь $x < \log_5 3$ гэж гарна.

$a^x > b$ ($a > 0, a \neq 1$) тэнцэтгэл биш

Жишээ 9. а. $2^x > 4$ б. $2^x \geq 4$ в. $2^x > -2$ г. $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 2$ тэнцэтгэл бишийг график ашиглан бод.

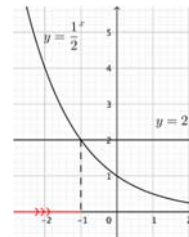
Бодолт. а. $y = 2^x$ муруй дээрх цэгүүдийн хувьд ординат нь 4-өөс их байх өөрөөр хэлбэл $y = 4$ шулуунаас дээш орших цэгүүдийн абсциссыг олно гэсэн үг. Эдгээр муруйн огтлолцлын цэгийн абсцисс нь $x = 2$ гэж олдох тул $2^x > 4$ тэнцэтгэл бишийн шийд нь $x > 2$ буюу $x \in]2, \infty[$ гэж гарна.



б. $2^x \geq 4$ тэнцэтгэл бишийн шийд нь $x \geq 2$ буюу $x \in [2, \infty[$ гэж гарна.



в. $y = 2^x$ функцийн дүр нь эерэг бодит тоон олонлог, өөрөөр хэлбэл бүх бодит x -ийн хувьд $2^x > 0$ тул $2^x > -2$ тэнцэтгэл бишийн шийд нь $]-\infty, \infty[$ байна (Зургийг харна уу).



г. $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 2$ тэнцэтгэл бишийн шийд нь $x < -1$ буюу $x \in]-\infty, -1[$ гэж гарна (Зургийг харна уу).

Эдгээр тэнцэтгэл биш бүрийн шийд болон шийдийн дүрслэлийг ажиглан $a^x > b$ хэлбэрийн тэнцэтгэл бишийн шийдийг хэрхэн олох тухай дүгнэлт хийе.

$a^x > b$, $a^x \geq b$ хэлбэрийн тэнцэтгэл бишийн шийдийг олохын тулд

- $a^x = b$ тэгшитгэлийн шийдийг олно.
- Зургийн суурь нь 1-ээс их эсэхийг шалгана. Өөрөөр хэлбэл $y = a^x$ функц өсөх эсвэл буурахыг шалгана.

Үүний дараа тэнцэтгэл бишийн шийдийг дараах дүрмээр олно.

Хэрэв $a > 1$ ба $b > 0$ бодит тоо бол

$$a^x > b \quad (a^x \geq b)$$

тэнцэтгэл бишийн шийд нь

$$x > \log_a b \quad (x \geq \log_a b)$$

байна.

Хэрэв $0 < a < 1$ ба $b > 0$ бодит тоо бол

$$a^x > b \quad (a^x \geq b)$$

тэнцэтгэл бишийн шийд нь

$$x < \log_a b \quad (x \leq \log_a b)$$

байна.

$b \leq 0$ үед $a^x > b$ тэнцэтгэл бишийн шийд нь $]-\infty, \infty[$ байна.

Жишээ 10. а. $8^x \geq 3$ б. $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 5$ в. $\left(\frac{1}{7}\right)^x > -3$ тэнцэтгэл бишийг бод.

Бодолт. а. Зэргийн суурь нь 1-ээс их ба $8^x = 3$ тэгшитгэлийн шийд нь $x = \log_8 3$ тул $8^x \geq 3$ тэнцэтгэл бишийн шийд нь $x \geq \log_8 3$ гэж гарна.

б. Зэргийн суурь нь 1-ээс бага ба $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 5$ тэгшитгэлийн шийд нь $x = \log_{\frac{1}{3}} 5 = -\log_3 5$ тул $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq 5$ тэнцэтгэл бишийн шийд нь $x < -\log_3 5$ гарна.

в. $y = \left(\frac{1}{7}\right)^x$ функцийн дүр нь эерэг бодит тоон олонлог буюу бүх бодит x -ийн хувьд $\left(\frac{1}{7}\right)^x > 0$ тул $\left(\frac{1}{7}\right)^x > -3$ тэнцэтгэл бишийн шийд нь $]-\infty, \infty[$ гэж олдоно.

Жишээ 11. $5^x > 2 \lg 5 + \lg 4$ тэнцэтгэл бишийг бод.

Бодолт. $2 \lg 5 + \lg 4$ илэрхийллийг логарифмын чанар ашиглан хялбарчилбал

$$2 \lg 5 + \lg 4 = \lg(5^2 \cdot 4) = \lg 100 = 2$$

гарна. Иймд $5^x > 2$ тэнцэтгэл бишийн шийд нь $x > \log_5 2$ гэж олдоно.

Жишээ 12. $6^{|x|} > 5$ тэнцэтгэл бишийг бод.

Бодолт. Зэргийн суурь нь 1-ээс их тул $|x| > \log_6 5$ байна. $\log_6 5 > 0$ тул $|x| > \log_6 5$ гэсэн модультай тэнцэтгэл бишийн шийд нь $x < -\log_6 5$ эсвэл $x > \log_6 5$ гэж гарна.

Жишээ 13. $2^{|x+1|} > \frac{1}{3}$ тэнцэтгэл бишийг бод.

Бодолт. Зэргийн суурь нь 1-ээс их тул $|x+1| > \log_2 \frac{1}{3}$ байна. $\log_2 \frac{1}{3} < 0$ тул $|x+1| > \log_2 \frac{1}{3}$ гэсэн модультай тэнцэтгэл бишийн шийд нь $x \in]-\infty, \infty[$ байна.

$2^{|x+1|} > \frac{1}{3}$ тэнцэтгэл бишийг графикийн аргаар бодож мөн болно.

Дасгал

58-65 Дараах тэгшитгэлийг бод.

58. $2^{x+1} \cdot 5^x = 400$

59. $3^x = 3 \cdot 2^{3x}$

60. $3^x 2^{2-x} = 6^x$

61. $2 \cdot 3^{x+1} - 5 \cdot 9^{x-2} - 81 = 0$

$$62. \sqrt{5^x} + 3\sqrt{5^{-x}} = 4$$

$$63. \sqrt{3^x} + 2\sqrt{3^{-x}} = 3$$

$$64. (2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x = 4$$

$$65. 6(4^x + 4^{-x}) - 35(2^x + 2^{-x}) + 62 = 0$$

65-71 Дараах систем тэгшитгэлийг бод.

$$66. \begin{cases} x + y = 3 \\ 3^x + 3^y = 12 \end{cases}$$

$$67. \begin{cases} 2^{9-8x} = 8^{y-5} \\ 3^y = 9^{x-3} \end{cases}$$

$$68. \begin{cases} 5^{2x} 4^{y+1} = 25 \\ 4^x 5^{2y} = 1 \end{cases}$$

$$69. \begin{cases} 2^x 5^y = 1 \\ 5^{x+1} 2^y = 2 \end{cases}$$

$$70. \begin{cases} xy = 10^5 \\ x^{\lg y} = 10^6 \end{cases}$$

$$71. \begin{cases} y^2 \cdot 10^{1+\lg x} = 10^{2+\lg 5} \\ 2^{2x+y} = 8^{y-x} \end{cases}$$

69-76 Дараах тэнцэтгэл бишийг бод.

$$72. \frac{1}{4} \leq \left(\frac{1}{8}\right)^x < 16$$

$$73. 2^x > 3$$

$$74. \left(\frac{1}{3}\right)^{3x+1} > \left(\frac{1}{3}\right)^{x+5}$$

$$75. 5^{|2x+1|} < 25$$

$$76. \left(\frac{1}{4}\right)^{|x+1|} > 4^{\log_{16} \frac{1}{64}}$$

$$77. 12^x 6^y = 288 \text{ тэгшитгэлийг хангах } x, y \text{ бүхэл тоог ол.}$$

$$78. (x^2 - x - 1)^{x+2} = 1 \text{ тэгшитгэлийг хангах } x \text{ бүхэл тоог ол.}$$

$$79. (4^x + 4^{-x}) - (2^x + 2^{-x}) - 4 = 0 \text{ тэгшитгэлийн шийдүүд нь } \alpha, \beta \text{ бол } 2^\alpha + 2^\beta \text{-ийн утгыг ол.}$$

$$80. 4^{\sin x} = 1 \text{ (} 0 \leq x \leq \pi \text{) тэгшитгэлийг бод.}$$

$$81. 2^{2x} + 2^{x+1} \cdot a + 3 - 2a = 0 \text{ тэгшитгэл ялгаатай хоёр шийдтэй байх бүх } a \text{ тоог ол.}$$

$$82. 4^{x+a} - 2^{x+b} + 2^{2a+2} = 0 \text{ тэгшитгэл ганц шийдтэй бол түүнийг ол. Энд } a, b \text{ нь бодит тоо байна.}$$

83. $2^{|x+2|} - |2^{x+1} - 1| = 2^{x+1} + 1$ тэгшитгэлийг бод.
84. Бүх эерэг бодит x тооны хувьд $x^{\log_2 x} \geq ax^2$ тэнцэтгэл биш үргэлж биелдэг бол бүх эерэг a тоог ол.
85. a, b нь эерэг тогтмол тоо гэе. Бүх бодит x тооны хувьд $a^{x^2+1} \geq b^x$ тэнцэтгэл биш үргэлж биелдэг бол (a, b) цэгүүдийн олонлогийг зургаар харуул.

3.4. Логарифм функц

10 дугаар ангид илтгэгч функц, 11-р ангид функцийн тодорхойлогдох муж, утгын муж, дүр, харилцан нэг утгатай функц, урвуу функц, харилцан урвуу функцийн чанарыг судалсан. Эдгээр мэдлэг чадвар дээр тулгуурлан логарифм функцийг тодорхойлох ба уг функцийн графикийн чанарыг судална.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, f(x) = a^x$ ($a \neq 1; a > 0$) илтгэгч функц нь харилцан нэг утгатай функц юм. Иймд илтгэгч функц урвуутай ба урвуу функцийг нь **логарифм функц** гэдэг.

Урвуу функцийг олдог дүрмийг ашиглан илтгэгч функцийн урвуугийнх нь томъёог гаргая. $y = a^x$ гэж бичээд логарифмын тодорхойлолт ашиглавал $x = \log_a y$ болох ба энд x, y -ийн үүргийг сольбол $y = \log_a x$ гэж гарна. Урвуу функцийн тодорхойлолт ёсоор логарифм функцийн тодорхойлогдох муж нь эерэг бодит тоон олонлог, утгын муж нь бодит тоон олонлог байна.

Тодорхойлолт: $a \neq 1; a > 0$ бодит тоо байг. $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_a^x$ функцийг **a суурьтай логарифм функц** гэнэ.

Хэрэв f ба g нь харилцан урвуу функцүүд бол

$$f(g(x)) = x \text{ ба } g(f(x)) = x$$

нөхцлүүд биелдэг тухай 11 дүгээр ангид судалсан.

Одоо $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, f(x) = a^x$ ($a \neq 1; a > 0$) ба $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \log_a^x$ функцүүдийг авч үзье. Давхар функцийн тодорхойлолт болон логарифмын чанар ёсоор

$$x > 0 \text{ үед } f(g(x)) = a^{\log_a^x} = x$$

ба

$$x \in \mathbb{R} \text{ үед } g(f(x)) = \log_a^{a^x} = x$$

нөхцлүүд биелнэ.

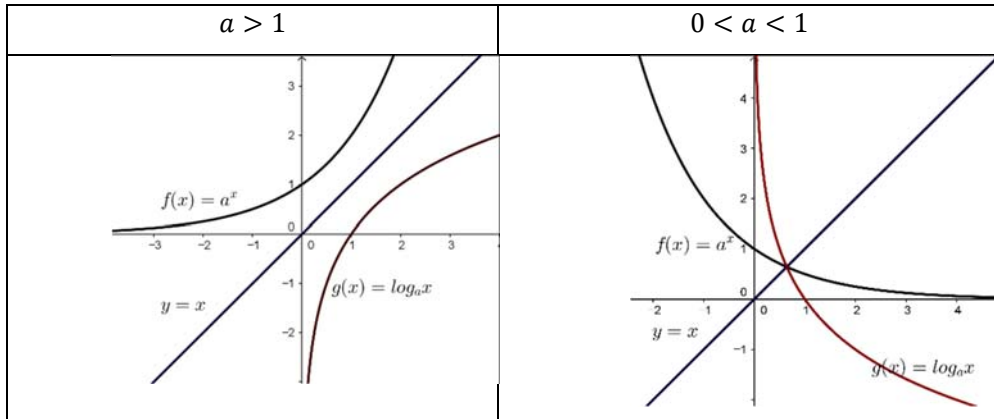
Харилцан урвуу функцийн график нь $y = x$ шулууны хувьд тэгш хэмтэй тул

$$f(x) = a^x \quad (a > 0, \quad a \neq 1)$$

илтгэгч функцийн графикийг тэгш хэмтэй хувиргах замаар

$$g(x) = \log_a^x$$

функцийн графикийг гарган авч болно. Дараах зурагт $f(x) = a^x (a > 0, a \neq 1)$ ба $g(x) = \log_a x$ функцүүдийн графикийг тоймлон зурж харууллаа.



Логарифмын суурь $a > 1$ үед $g(x) = \log_a^x$ функц нь тодорхойлогдох муж дээрээ өсөх функц, $0 < a < 1$ үед тодорхойлогдох муж дээрээ буурах функц байна.

Иймд дараах чанарууд мөрдөн гарна.

Чанар 1. Хэрэв b, c эерэг тоонууд ба $a > 1$ үед

$$b < c \text{ бол } \log_a b < \log_a c \text{ буюу}$$

$$\log_a b < \log_a c \text{ бол } b < c$$

байна.

Жишээ 1. $3, \log_2 7, \log_4 63$ тоонуудыг буурах эрэмбээр байрлуул.

Бодолт. Хэрэв эдгээр тоонуудыг ижил суурьтай логарифмаар илэрхийлбэл жишихэд хялбар байна. Эдгээрийг 2 суурьтай логарифмаар илэрхийлбэл $\log_2 8, \log_2 7, \log_2 \sqrt{63}$ болох ба логарифмын суурь нь 1-ээс их тул $\log_2 8 > \log_2 \sqrt{63} > \log_2 7$ байна. Иймд буурах эрэмбэ нь $3, \log_4 63, \log_2 7$ болно.

Чанар 2. Хэрэв b, c эерэг тоонууд ба $0 < a < 1$ үед

$$b < c \text{ бол } \log_a b > \log_a c \text{ буюу}$$

$$\log_a b > \log_a c \text{ бол } b < c$$

байна.

Жишээ 2. $\log_{\frac{1}{3}} 2, \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}, \log_{\frac{1}{3}} 3, \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}$ тоонуудыг өсөх эрэмбээр байрлуул.

Бодолт. Эдгээр нь ижил суурьтай ба $0 < a < 1$ тул $\log_{\frac{1}{3}} 3 < \log_{\frac{1}{3}} 2 < \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2} < \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}$ байна.

Жишээ 3. $a = \sqrt[7]{8}$, $b = \sqrt[6]{5}$, $c = \sqrt[5]{6}$ тоонуудыг өсөх эрэмбээр байрлуул. $\lg 2 = 0.3010$, $\lg 3 = 0.4771$ гэдгийг ашигла.

Бодолт. $\lg a = \lg 8^{\frac{1}{7}} = \frac{1}{7} \lg 8 = \frac{3}{7} \lg 2 = \frac{3}{7} \cdot 0.3010 = 0.1290$

$\lg b = \lg 5^{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6} \lg 5 = \frac{1}{6} (\lg 10 - \lg 2) = \frac{1}{6} \cdot (1 - 0.3010) = 0.1165$

$\lg c = \lg 6^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5} \lg 6 = \frac{1}{5} (\lg 3 + \lg 2) = \frac{1}{5} \cdot (0.4771 + 0.3010) = 0.15562$ болно.

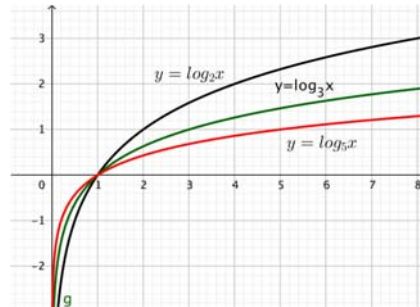
Иймд

$$\lg b < \lg a < \lg c \text{ тул } b < a < c$$

гэж гарна.

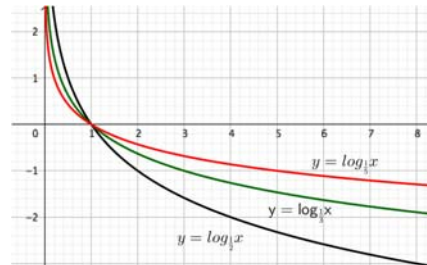
Жишээ 4. $y = \log_2 x$, $y = \log_3 x$, $y = \log_5 x$ функцийн графикийг координатын нэг хавтгайд байгуулж хэрхэн өсч буйг харьцуулан тайлбарла.

Бодолт. Функцийн графикийг байгуулахдаа утгын хүснэгт ашиглаж болно. Эдгээр логарифм функцийн суурь нь 1-ээс их тул бүгд өсөх функц байна. Графикаас харахад $x > 1$ үед $\log_2 x > \log_3 x > \log_5 x$ байна. Өөрөөр хэлбэл энэ үед $y = \log_2 x$ функц нь илүү хурдан өснө гэсэн үг. Харин $x < 1$ үед $\log_2 x < \log_3 x < \log_5 x$ байна.



Жишээ 5. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, $y = \log_{\frac{1}{3}} x$, $y = \log_{\frac{1}{5}} x$ функцийн графикийг координатын нэг хавтгайд байгуулж, хэрхэн буурч буйг харьцуулан тайлбарла.

Бодолт. Эдгээр логарифм функцийн суурь нь 1-ээс бага тул бүгд буурах функц байна. Графикаас харахад $x < 1$ үед $\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{3}} x > \log_{\frac{1}{5}} x$ байна. Өөрөөр хэлбэл энэ үед $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ функц

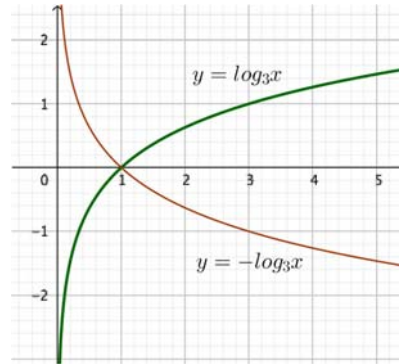


нь илүү хурдан буурна гэсэн үг. Харин $x > 1$ үед $\log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{3}} x < \log_{\frac{1}{5}} x$ байна.

$y = \log_{\frac{1}{2}} x$ функц илүү хурдан буурна.

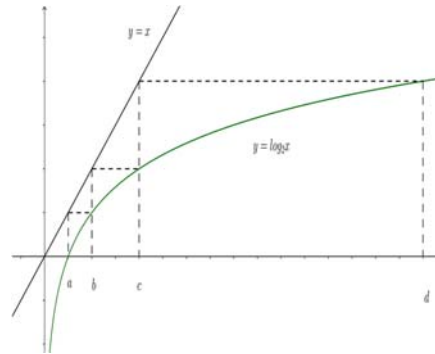
Жишээ 6. $y = \log_3 x$, $y = -\log_3 x$ функцийн графикийг координатын нэг хавтгайд байгуул. Графикууд ямар хамааралтай байгааг тайлбарла.

Бодолт. $y = \log_3 x$ нь өсөх функц ба $y = -\log_3 x$ нь буурах функц байна. Эдгээр функцийн график нь $(1,0)$ цэгийг дайрна. $y = \log_3 x$ функцийн график дээр орших цэгийг $M(x, y)$ ($x > 0$) гэвэл $M(x, -y)$ цэг нь $y = -\log_3 x$ функцийн график дээр оршно. Иймд эдгээр функцийн график нь x -тэнхлэгийн хувьд тэгш хэмтэй.



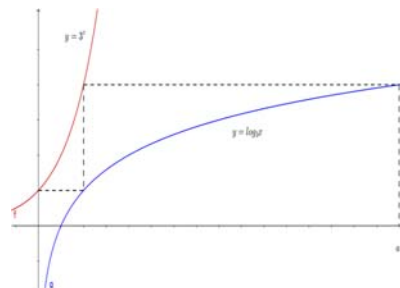
Жишээ 7. Зурагт $y = \log_2 x$ ба $y = x$ функцийн график өгсөн бол $d - c$ -ийн утгыг ол.

Бодолт. $y = \log_2 x$ функцийн график нь $(1,0)$ цэгийг дайрах тул $a = 1$ байна. Иймд $\log_2 b = 1$ ба эндээс $b = 2$ гэж олдоно. $\log_2 c = 2$ болох тул $c = 2^2 = 4$, $\log_2 c = 4$ гэдгээс $d = 2^4 = 16$ гарна. Иймээс $d - c = 12$ болно.



Жишээ 8. Зурагт $y = \log_3 x$ ба $y = 3^x$ функцийн график өгсөн бол a -ийн утгыг ол.

Бодолт. $y = 3^x$ функцийн график нь $(0,1)$ цэгийг дайрна. Иймд $1 = \log_3 x$ гэдгээс логарифмын тодорхойлолтоор $x = 3$ гэж



олдоно. $y = 3^3 = 27$ тул $27 = \log_3 x$ гэдгээс

$x=3^{27}$ гэж олдоно.

Жишээ 9. $y = \log_3(2x^2 + 5x - 3)$ функцийг тодорхойлогдох мужийг ол.

Бодолт. $2x^2 + 5x - 3 > 0$ үед өгсөн функц тодорхойлогдох ба энэ квадрат тэнцэтгэл бишийн шийд нь $x < -3$ эсвэл $x > \frac{1}{2}$ байна. Иймд уг функцийг тодорхойлогдох муж нь $x \in]-\infty, -3[\cup]\frac{1}{2}, \infty[$ гэж гарна.

Жишээ 10. Тодорхойлогдох муж нь $2 \leq x \leq 9$ байх $f(x) = \log_3 x$ функцийг дүрийг ол. Функцийн хамгийн их утга ба хамгийн бага утга нь хэд вэ?

Бодолт. Өгсөн логарифм функцийг суурь нь 1-ээс их тул x -ийн их утганд функцийг их утга, x -ийн бага утганд функцийг бага утга харгалзна. Иймд функцийг хамгийн их утга нь $f(9) = \log_3 9 = 2$, хамгийн бага утга нь $f(2) = \log_3 2$ гэж олдох тул дүр нь $I = [\log_3 2, 2]$ гэсэн олонлог байна.

Жишээ 11. Тодорхойлогдох муж нь $1 \leq x \leq 7$ байх $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x + 1)$ функцийг дүрийг ол. Функцийн хамгийн их утга ба хамгийн бага утга нь хэд вэ?

Бодолт. Өгсөн логарифм функцийг суурь нь 1-ээс бага тул $(x + 1)$ -ийн их утганд функцийг бага утга, $(x + 1)$ -ийн бага утганд функцийг бага утга харгалзна. Иймд функцийг хамгийн их утга нь $f(1) = \log_{\frac{1}{2}}(1 + 1) = \log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$, хамгийн бага утга нь $f(7) = \log_{\frac{1}{2}}(7 + 1) = \log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$ гэж олдох тул дүр нь $I = [-3, -1]$ гэсэн олонлог байна.

Жишээ 12. $y = \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 2x + 10)$ функцийг тодорхойлогдох мужийг ол. Мөн хамгийн их утгыг ол.

Бодолт. Өгсөн функцийг тодорхойлогдох муж нь $x^2 - 2x + 10 > 0$ нөхцлийг хангах x тооны олонлог байна. Иймд $x \in]-\infty, \infty[$ гэж олдоно.

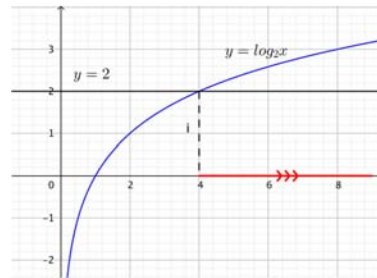
Өгсөн логарифм функцийг суурь нь 1-ээс бага тул $(x^2 - 2x + 10)$ -ийн хамгийн бага утга авах үед функц хамгийн их утга авна. Иймд бүтэн квадрат ялгавал

$$(x^2 - 2x + 10) = (x - 1)^2 + 9$$

болох ба $(x - 1)^2 \geq 0$ тул $x - 1 = 0$ буюу $x = 1$ үед $(x^2 - 2x + 10)$ -ийн хамгийн бага утга нь 9 гэж олдоно. Иймд өгсөн функцийн хамгийн их утга нь $y = \log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$ гэж гарна.

Жишээ 13. $\log_2 x > 2$ тэнцэтгэл бишийг график ашиглан бод.

Бодолт. Хялбар илтгэгч тэгшитгэл, тэнцэтгэл бишийг графикийн аргаар хэрхэн боддог тухай эргэн санаарай. Үүнтэй төстэй бодно. Өөрөөр хэлбэл, $y = \log_2 x$ функцийн график дээр орших ба ординат нь 2-оос их байдаг цэгүүдийн абсцисс нь өгсөн тэнцэтгэл бишийн шийд болно. $\log_2 x = 2$ үед $x = 4$ гэж олдох тул дээрх нөхцлийн хангах цэгүүдийн абсцисс нь $x > 4$ байна. Иймд өгсөн тэнцэтгэл бишийн шийдийн олонлог нь $]4, \infty[$ гэж гарна.



Жишээ 14. \mathbb{R} нь бодит тоон олонлог ба $E = [1, \infty[$ олонлог байв.

$\mathbb{R} \rightarrow E$, $f(x) = 2^{x-1} + 1$ функцийн урвууг ол.

Бодолт. Харилцан нэг утгатай гэдгийг харуулаарай. Харилцан нэг утгатай функц цор ганц урвуутай тул урвуу функц олдог дүрмийг хэрэглэе. $y - 1 = 2^{x-1}$ болох ба хоёр талаас нь 2 сууриар логарифмчилбал

$$\log_2(y - 1) = x - 1$$

болох ба эндээс

$$x = \log_2(y - 1) + 1$$

гэж гарна. Энд x, y -ийн үүргийг сольбол өгсөн функцийн урвуу нь

$$y = \log_2(x - 1) + 1$$

гэж олдоно.

Дасгал

[86-90] Дараах функцүүдийн тодорхойлогдох мужийг ол.

86. $y = \log_2(2x - 9) + 5$

87. $y = \log_5(-9x - 15) - 1$

88. $y = -\log_{\frac{2}{3}}(2x + 3)^2$

89. $y = -\log_{\frac{1}{4}}(2x^2 - 3x - 2) + 4$

90. $y = -\log_{\frac{2}{3}}(3x^2 - x + 2)$

[91-94] Дараах функцүүдийн урвууг ол.

91. $E =] - 3, \infty[$ гэж өгөв. $\mathbb{R} \rightarrow E$, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3$

92. $E =] - \infty, 1[$ гэж өгөв. $\mathbb{R} \rightarrow E$, $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} + 1$

93. $D =]1, \infty[$ бөгөөд $D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3\log_3(x - 1) + 1$

94. $D =]-2, \infty[$ бөгөөд $D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -\log_{\frac{1}{3}}(x + 2) - 2$

95. Дараах функцүүдийг өсөх буурах эсэхийг тогтоо.

а. $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$ б. $y = \log_{\sqrt{3}} x$ в. $y = \left(\frac{4}{3}\right)^{-x}$ г. $y = \log_{\frac{1}{4}} x$

96. $y = \log_3 x^2$ ба $y = 2\log_3 x$ функцүүд адилтгал тэнцүү мөн үү? Тайлбараа үндэслэ.

[97-100] Дараах тоонуудын өсөх эрэмбийг ол.

97. $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{5}$, $\log_{\frac{1}{4}} \frac{2}{8}$, $\log_{\frac{1}{4}} 2$

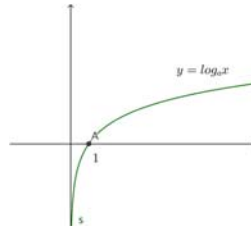
98. $\log_3 \frac{1}{5}$, $\log_3 \frac{2}{8}$, $\log_3 2$

99. $\log_2 18$, $\log_4 20$, $\log_8 2$

100. $\frac{1}{3} \lg \frac{1}{5}$, $\lg 3$, $\frac{1}{2} \lg 5$

101. Зурагт $y = \log_a x$ функцийн график өгөгдсөн бол үүнийг ашиглан дараах функцүүдийн графикийг байгуул.

а. $y = \log_a(-x)$ б. $y = \log_a\left(\frac{1}{x}\right)$



[102-104] Дараах функцүүдийн урвуу функцийг ол.

102. Тодорхойлогдох муж нь $\left\{x \mid \frac{1}{100} \leq x \leq 100\right\}$ байх $y = \lg x$

103. Тодорхойлогдох муж нь $\{x \mid 11 \leq x \leq 126\}$ байх $y = -\log_5(x - 1)$

104. Тодорхойлогдох муж нь $\left\{x \mid \frac{4}{3} \leq x \leq \frac{16}{3}\right\}$ байх $y = \log_{\frac{1}{2}}(6x) + 1$

[105-108] Дараах тэгшитгэлийг бод.

105. $\log_2(2x - 3) = 3$

106. $\log_{3x} 27 = 3$

107. $\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{x+1}\right) = -2$

108. $\log_{x-2} 16 = 2$

[109-112] Дараах тэнцэтгэл бишийг бод.

109. $\log_{\frac{1}{5}}(x - 2) \geq -2$

110. $0 < \lg x < 2$

111. $1 \leq \log_{0.1} 2x \leq 2$

112. $\log_7(2x + 1) < 1$

113. $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$, $g(x) = \log_2 x$ функцүүд өгсөн бол $g(f(-3))$ утгыг ол.

114. $f(x) = \log_a(x + 2) + 1$ функцийн хувьд $f(2) = 5$ бол $f(14)$ утгыг ол.
($a > 0$, $a \neq 1$)

115. $f(x) = \log_2\left(1 + \frac{1}{x^2-1}\right)$ функц өгсөн. Тэгвэл

$a = f(2) + f(3) + f(4) + \dots + f(63)$ нь хэдээс хэтрэхгүй тоо байх вэ?

116. $y = \log_4(x - 2) + 3$ функцийн урвууг $y = a^{2x+b} + c$ гэвэл abc үржвэрийг ол.

117. $y = \log_6 x$ функцийн урвуу $y = g(x)$ функцийн хувьд $g(\alpha) = \frac{1}{4}$, $g(\beta) = \frac{1}{3}$ бол $g(\alpha + \beta)$ -ийг ол.

118. $y = \log_3(x^3 + 1)$ функцийн урвууг $y = g(x)$ гэвэл $g(g(g(2)))$ утгыг ол.

119. $y = \log_5 x + 2$ функцийн урвууг $y = g(x)$ гэвэл утга нь a -аас хамаарахгүй байх илэрхийлэл аль нь вэ?

а. $g(a) + g(-a)$ б. $g(a) - g(-a)$ в. $g(a) + g\left(\frac{1}{a}\right)$

г. $g(a)g\left(\frac{1}{a}\right)$ д. $g(a)g(-a)$

120. 1-ээс ялгаатай, эерэг a, b тоонуудын хувьд дараах өгүүлбэрүүд үнэн эсэхийг тогтоо.

а. Хэрэв $a > b > 1$ бол $\log_a b < \log_b a$ байна.

б. Хэрэв $a > b > 1$ бол $a^b < b^a$ байна.

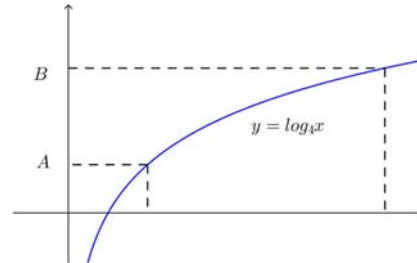
в. Хэрэв $2^a = 3^b$ бол $a > b$ байна.

г. Хэрэв $\log_2 a = \log_3 b$ бол $a > b$ байна.

121. Хэрэв $0 < a < b < a$ бол $\log_a \frac{b}{a}$, $\log_a b$, $\log_b a$, $\log_a \frac{a}{b}$ илэрхийллүүдээс хамгийн их болон хамгийн бага утгатай илэрхийллийг ол.

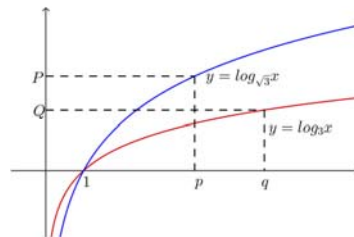
122. Хэрэв $1 < x < 4$ үед $A = \log_2 x^2$, $B = (\log_2 x)^2$, $C = \log_2(\log_2 x)$ илэрхийллүүдийн утгаар нь эрэмбэл.

123. Зурагт $y = \log_4 x$ функцийг график өгчээ. AB хэрчмийн урт 3 бол $\frac{b}{a}$ -ийн утгыг ол.



124. Хэрэв $y = 2$ шулуун нь $y = \log_2 x$ ба $y = \log_3 x$ функцүүдийн графиктай харгалзан A, B цэгт огтлолцдог бол AB хэрчмийн уртыг ол.

125. Зурагт $y = \log_3 x$ ба $y = \log_{\sqrt{3}} x$ функцийг график өгчээ. $OP:OQ = 3:2$ бол p, q -ийн хамаарлыг ол.



3.5. $y = e^x$ ба $y = \ln x$ функц

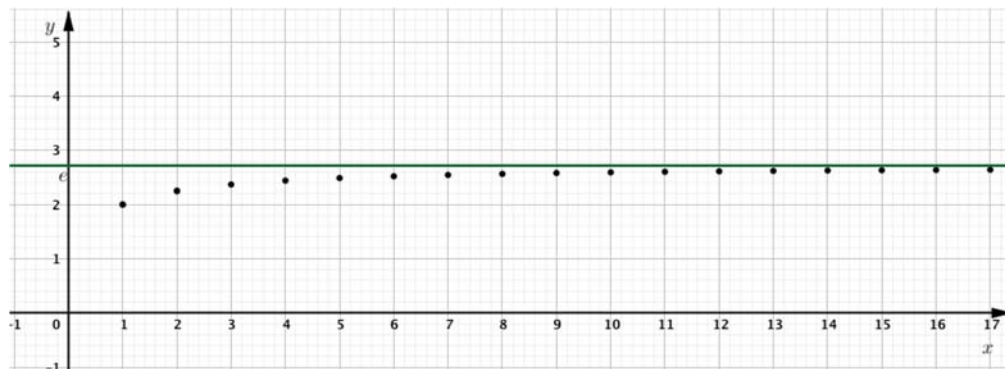
***e* тоо**

$e = 2.7182818284590452353602874\dots$ гэсэн төгсгөлгүй, үегүй аравтын бутархайг Эйлерийн тоо буюу e тоо гэдэг. e нь математикч Эйлерийн (Euler)-ийн нэрний эхний үсэг юм.

e тооны талаар илүү сайн төсөөлөлтэй болохын тулд $(1 + \frac{1}{n})^n$ дарааллын гишүүдийг ажиглая. Уг дарааллын эхний 2 гишүүн болон 5, 10, 100, 1000, 10000, 100000 дугаар гишүүнийг компьютер ашиглан таслалаас хойш 5 орны нарийвчлалтайгаар бодож дараах хүснэгтэд харууллаа.

n	1	2	5	10	100	10000	100000	1000000
$(1 + \frac{1}{n})^n$	2.00000	2.25000	2.48832	2.59374	2.70481	2.71692	2.71815	2.71827

n нь ихсэх тусам энэ дарааллын гишүүд нь e тоо руу дөхөж байгааг хүснэгтээс ажиглаж болно. Энэ дарааллын гишүүд нь e тооноос хэтрэхгүй гэдгийг дарааллын хязгаар сэдвийг судлах үед дараагийн түвшинд үзнэ. Дараах зурагт дарааллын эхний гишүүдийг дүрсэлж харууллаа.



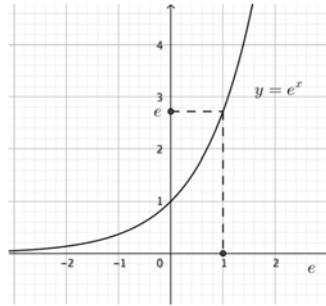
$y = e^x$ ба $y = \ln x$ функц

e тоо нь нэгээс ялгаатай эерэг тоо тул илтгэгч функцийг суурь болгон сонгож болно.

Тодорхойлолт. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = e^x$ функцийг **экспоненциал функц** гэнэ.

$e > 1$ тул $y = e^x$ нь өсөх функц байна. Тооны машин ашиглаж $y = e^x$ функцийг утгын хүснэгт зохиох замаар графикийг нь байгуулъя.

x						
y						



Хэрэв логарифм функцийг суурь нь e тоо байвал **натурал логарифм функц** гэх ба $y = \ln x$ гэж бичнэ.

Тодорхойлолт. $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ функцийг **натурал логарифм функц** гэнэ.

Натурал логарифм функц нь өсөх функц байна. Учир нь суурь нь нэгээс их тоо юм.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = e^x$ ба $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \ln x$ функцүүдийг авч үзье. Илтгэгч ба логарифм функцүүдийн нэгэн адил

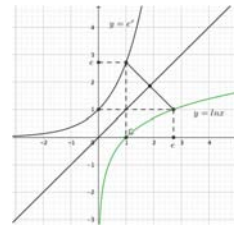
$$x > 0 \text{ үед } f(g(x)) = e^{\ln x} = x$$

ба

$$x \in \mathbb{R} \text{ үед } \ln(e^x) = x$$

нөхцлүүд биелнэ.

Харилцан урвуу функцийг чанар ашиглан графикийг нь байгуулж зурагт харуулав.



Дасгал

126-131 Дараах функцийг график байгуулж, тодорхойлогдох муж, дүрийг ол.

126. $y = e^{-x}$

127. $y = -e^x$

128. $y = -e^{-x}$

129. $y = -\ln x$

130. $y = \ln(-x)$

131. $y = -\ln(-x)$

132-134 Дараах тэгшитгэлийг бод.

132. $4e^{|x-1|} = \ln e^6 + 2$

133. $\ln(2x + 1) = 2$

134. $\ln|x + 2| = -1$

135-139 Дараах функцийн тодорхойлогдох мужийг ол.

135. Дүр нь $I = [e^{-2}, e^2]$ олонлог байх $y = e^x$ функц

136. Дүр нь $I = [1, 8]$ олонлог байх $y = e^{-x}$ функц

137. Дүр нь $I = [4, 16]$ олонлог байх $y = e^{2x}$ функц

138. $y = \ln(2x - 5)$

139. $y = \ln(e^x - e)$

140-143 Дараах функцийн дүрийг ол.

140. Тодорхойлогдох муж нь $D = [-5, 3]$ олонлог байх $y = e^x$ функц

141. Тодорхойлогдох муж нь $D = [e, e^5]$ олонлог байх $y = \ln x$ функц

142. Тодорхойлогдох муж нь $D = [3; 10]$ олонлог байх $y = \ln x$ функц

143. Тодорхойлогдох муж нь $D = [-e^5; -e^2]$ олонлог байх $y = \ln(-x)$ функц

144-147 Дараах функцийн урвуу функцийг ол.

144. $E =] - 2, \infty[$ гэж өгөв. $\mathbb{R} \rightarrow E$, $f(x) = e^x - 2$

145. $E =] - \infty, 3[$ гэж өгөв. $\mathbb{R} \rightarrow E$, $f(x) = -e^{x+1} + 3$

146. $D =]2, \infty[$ бөгөөд $D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x - 2) + 1$

147. $D =]-1, \infty[$ бөгөөд $D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3\ln(x + 1) + 1$

148. Хэрэв $e^{2x} = 3$ бол дараах илэрхийлэл тус бүрийн утгыг ол.

а. $\left(\frac{1}{e^3}\right)^{-4x}$ б. $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ в. $\frac{e^{3x} + e^{-3x}}{e^x + e^{-x}}$ г. $\frac{e^{3x} - e^{-3x}}{e^x - e^{-x}}$

149. $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ ба $f(a) = \frac{1}{2}$, $f(b) = \frac{1}{3}$ бол $f(a + b)$ -ийн утгыг ол.

150. Хязгаарлагдмал орчинд байгаа тодорхой төрөл зүйлийн анхны тоо хэмжээ нь 100 бөгөөд орчны багтаамж нь 1000 бол түүний тоо хэмжээ нь $P(t) = \frac{100000}{100 + 900 \cdot e^{-t}}$ байдаг. Энд t жилээр хэмжигдэнэ. Дараах асуултаудад хариул.

(а) Энэ функцийн графикийг зурж, тоо хэмжээ 900 хүрэхэд хэр хугацаа шаардлагатайг тооцоол.

(б) t хугацааны дараа үлдэх массыг ол.

(в) Урвуу функцийг олж, түүний утгыг тайлбарла.

(г) Урвуу функц ашиглан тоо хэмжээ 900 хүрэх хугацааг ол. (а) хэсгийн үр дүнтэй харьцуул.

3.6. Рационал функц

Тодорхойлолт. $P(x)$, $Q(x)$ нь харгалзан m , n зэргийн ($Q(x)$ нь тэг биш олон гишүүнт) олон гишүүнтүүд гээ.

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

хэлбэрийн функцийг **бутархай рационал функц** гэнэ. Энэ функцийг тодорхойлогдох муж нь $Q(x) \neq 0$ байх бүх x тооны олонлог байна.

Хэрэв хүртвэр олон гишүүнтийн зэрэг нь хуваарь олон гишүүнтийн зэргээс их байвал ($m > n$) зөв биш бутархай рационал функц, бага бол ($m < n$) зөв бутархай рационал функц гэнэ.

Жишээ 1. $y = \frac{x^3 - x + 1}{x^2 - 1}$ функцийг хувьд хүртвэр олон гишүүнтийн зэрэг нь 3, хуваарийн зэрэг нь 2 тул зөв биш бутархай рационал функц юм. Тодорхойлогдох муж нь $x \neq \pm 1$ байх бүх бодит x тооны олонлог буюу $]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, \infty[$ байна. Харин $y = \frac{x+1}{x^2+1}$ нь зөв бутархай рационал функц бөгөөд хуваарь нь тэгтэй тэнцэх x тоо олдохгүй тул тодорхойлогдох муж нь $]-\infty, \infty[$ байна.

Олон гишүүнт ба Безугийн теорем сэдвийг судлах үед рационал бутархайг хялбар рационал функцүүдийн нийлбэрт задлах тухай үзсэн. Энэ мэдлэг дээр тулгуурлан рационал функцүүдийг хялбар рационал функцүүдийн нийлбэрт задлах бодлого бодох нь рационал функцийг интегралчлах сэдвийг судлах үед хэрэг болно. Хялбар рационал бутархайгаар илэрхийлэгдэх функцүүдийг хялбар рационал функц гэж ойлгоно.

Жишээ 2. $y = \frac{-5x^2+1}{6x^2+x-1}$ функцийг хялбар бутархай рационал функцүүдийн нийлбэрт задал.

Бодолт. Хүртвэр олон гишүүнтийг хуваарь олон гишүүнтэд хуваавал

$$\frac{-12x^2 + 1}{6x^2 + x - 1} = -2 + \frac{2x - 1}{6x^2 + x - 1}$$

болох ба хуваарь $6x^2 + x - 1$ нь $(2x + 1)(3x - 1)$ гэсэн үржигдэхүүнд задрах тул

$$\frac{2x - 1}{6x^2 + x - 1} = \frac{A}{2x + 1} + \frac{B}{3x - 1}$$

хэлбэрт бичиж тодорхойгүй коэффициентийн арга хэрэглэвэл $A = \frac{4}{5}$, $B = -\frac{1}{5}$

гэж олдох тул

$$y = -2 + \frac{4}{5(2x+1)} - \frac{1}{5(3x-1)}$$

гэж задарна.

Жишээ 3. $y = \frac{6x}{x^4-81}$ функцийг олон гишүүнт болон хялбар бутархай рационал функцүүдийн нийлбэрт задал.

Бодолт. Хуваарь олон гишүүнт нь $x^4 - 81 = (x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)$ гэж задрах тул

$$\frac{6x}{x^4 - 81} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x + 3} + \frac{Cx + d}{x^2 + 9}$$

хэлбэрт бичиж тодорхойгүй коэффициентийн арга хэрэглэвэл $A = \frac{1}{6}$, $B = \frac{1}{6}$,

$C = -\frac{1}{3}$, $D = 0$ гэж олдох тул

$$y = \frac{1}{6(x-3)} + \frac{1}{6(x+3)} - \frac{1}{3(x^2+9)}$$

гэж задарна.

Тодорхойлолт. $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ функц байг. Хэрэв $x = a$ нь $Q(x)$ олон гишүүнтийн язгуур ($Q(a) = 0$) бол $x = a$ шулууныг $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ функцийн графикийн **босоо асимптот** гэнэ.

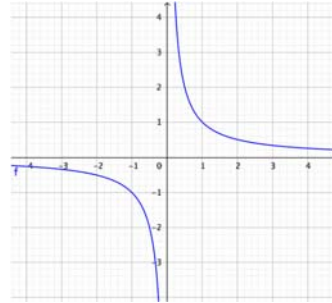
Тодорхойлолт. $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ функц байг. Хэрэв хүртвэр олон гишүүнтийн зэрэг нь хуваарийнхаас бага бол $y = 0$ шулуун $f(x)$ функцийн графикийн **хэвтээ асимптот** гэнэ. Хүртвэр ба хуваарь олон гишүүнтийн зэрэг нь тэнцүү ба ахмад гишүүний коэффициент нь харгалзан a_n , b_n бол $y = \frac{a_n}{b_n}$ шулууныг $f(x)$ функцийн графикийн **хэвтээ асимптот** гэнэ.

Санамж. “Функцийн хязгаар” гэсэн сэдвийн хүрээнд функцийн графикийн асимптот шулууны тухай илүү нарийвчлан судалдаг. “Функцийн хязгаар” сэдвийг бүрэн дунд боловсролын математикийн хөтөлбөрөөр судлахгүй. Энд функцийн графикийн асимптотын талаар төсөөлөлтэй болох ба хялбар рациональ функцийн хэвтээ босоо асимптотыг олж сурна.

Жишээ 4. $y = \frac{x^2-x+1}{x^3-1}$ функцийн графикийн босоо, хэвтээ асимптотыг ол.

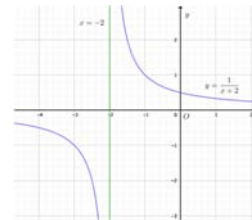
Бодолт. Хүртвэр олон гишүүнтийн зэрэг нь хуваарь олон гишүүнтийн зэргээс бага тул $y = 0$ гэсэн хэвтээ асимптоттой. Хуваарь олон гишүүнтийн язгуур нь $x = 1$ тул $x = 1$ гэсэн шулуун босоо асимптот болно.

Жишээ 5. Бидний судалсан $y = \frac{1}{x}$ функцийн графикийн хувьд $x = 0$ шулуун буюу Oy тэнхлэг нь босоо асимптот, харин $y = 0$ шулуун буюу Ox тэнхлэг хэвтээ асимптот болно. $y = \frac{1}{x}$ функцийн график дээр оршин аливаа цэгийн координатыг $M(x, y)$ гэвэл $M_1(-x, -y)$, $M_2(y, x)$, $M_3(-y, x)$ цэгүүд нь уг функцийн график дээр оршно. Иймд функцийн график $O(0, 0)$ цэгийн хувьд, $y = x$, $y = -x$ шулуунуудын хувьд тэгш хэмтэй. Графикийг зурагт харуулав.



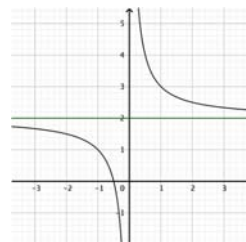
Жишээ 6. $y = \frac{1}{x+2}$ функцийн графикийн хэвтээ, босоо асимптотыг олж графикийг байгуул.

Бодолт. $x + 2$ олон гишүүнтийн язгуур нь $x = -2$ тул уг шулуун нь өгсөн функцийн графикийн босоо асимптот болно. Харин хүртвэр олон гишүүнтийн зэрэг нь хуваарь олон гишүүнтийн зэргээс бага тул $y = 0$ шулуун хэвтээ асимптот юм. Функцийн график нь $(-2, 0)$ цэгийн хувьд тэгш хэмтэй. Графикийг зургаас харна уу.



Жишээ 7. $y = \frac{2x+1}{x}$ функцийн босоо ба хэвтээ асимптотыг олж, графикийг байгуул.

Бодолт. Функцийн графикийн босоо асимптот нь $x = 0$ шулуун байна. Харин хүртвэр ба хуваарь олон гишүүнтийн зэрэг нь ижил ба ахмад гишүүний коэффициент нь харгалзан 2, 1 байна. Иймд хүртвэр олон гишүүнтийг хуваарь олон гишүүнтэд хуваавал $y = \frac{2x+1}{x} = 2 + \frac{1}{x}$ болох тул $y = 2$ шулуун хэвтээ асимптот байна. $y = \frac{2x+1}{x}$ функцийн график нь $(0, 2)$ цэгийн хувьд тэгш хэмтэй байна. Графикийг тоймлон байгууллаа.

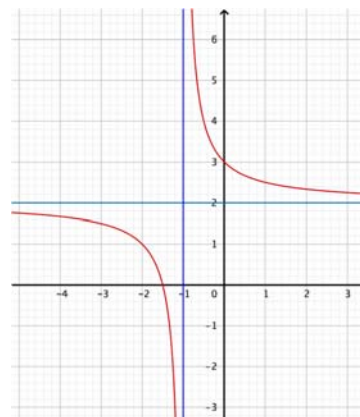


Жишээ 8. $y = \frac{2x+3}{x+1}$ функцийн графикийг тоймлон зур.

Бодолт. Босоо, хэвтээ асимптотыг олъё.

$y = \frac{2x+3}{x+1} = 2 + \frac{1}{x+1}$ функцийн графикийн хувьд $x = -1$ шулуун нь босоо асимптот, $y = 2$ шулуун нь хэвтээ асимптот болно. Функцийн график нь $(-1, 2)$ цэгийн хувьд тэгш хэмтэй байна.

Функцийн график координатын тэнхлэгүүдтэй огтлолцох цэгүүдийг олъё. $y = 0$ тэгшитгэл бодоход $x = -1.5$ гарна. $x = 0$ тэгшитгэл бодоход $y = 3$ гарна. Иймд Ox тэнхлэгийг огтлох цэг нь $(-1.5, 0)$, Oy тэнхлэгийг огтлох цэг нь $(0, 3)$ байна. Эдгээр дээр тулгуурлан графикийг тойм байдлаар зурж харууллаа.



Жишээ 5-8-ыг ажиглавал $y = \frac{cx+d}{ax+b}$ ($a \neq 0$, $ad - bc \neq 0$) функцийн графикийн тухай дараах дүгнэлтүүдийг хийж болно. Хүртвэр олон гишүүнтийг хуваарь олон гишүүнтэд хуваавал $y = \frac{cx+d}{ax+b}$ функцийг $y = q + \frac{k}{x-p}$ хэлбэрт шилжүүлж болно. Иймд:

- $y = q = \frac{c}{a}$ гэсэн хэвтээ асимптоттой байна.
- $x = p = -\frac{b}{a}$ гэсэн босоо асимптоттой байна.
- Функцийн график нь $(-\frac{b}{a}, \frac{c}{a})$ цэгийн хувьд тэгш хэмтэй байна.

Жишээ 9. Хэрэв $y = \frac{3x-3}{x-2}$ функцийн график нь $y = x + p$ $y = -x + q$ шулууны хувьд тэгш хэмтэй бол p, q тооны үржвэрийг ол.

Бодолт. Өгсөн функцийг $y = q + \frac{k}{x-p}$ хэлбэрт шилжүүлье. $y = \frac{3x-3}{x-2} = \frac{3(x-2)+3}{x-2} = 3 + \frac{3}{x-2}$ болох тул өгсөн функцийн график нь $x = 2, y = 3$ шулуунуудын огтлолцлын цэг $(2, 3)$ цэгийг дайрсан, налалтууд нь ± 1 байх шулуунуудын хувьд тэгш хэмтэй байна. Иймд $y = x + p$ $y = -x + q$ шулуунууд нь $(2, 3)$ цэгийг дайрах тул $3 = 2 + p$ $3 = -2 + q$ тэгшитгэл гарах ба эндээс $p = 1, q = 5$ гэж гарах ба $pq = 5$ гэж олдоно.

Жишээ 10. $y = \frac{2x+1}{2x-1}$ функц өгсөн бол дараах асуултуудад хариул.

а. Хэрэв тодорхойлогдох муж нь $D = \left\{x \mid -1 \leq x < \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < x \leq 1\right\}$ бол дүрийг ол.

Б. Хэрэв дүр нь $I = \{y \mid y \leq 0, y \geq 3\}$ бол тодорхойлогдох мужийг ол.

Бодолт. Өгсөн функцийг $y = \frac{2x+1}{2x-1} = 1 + \frac{2}{2x-1} = 1 + \frac{1}{x-\frac{1}{2}}$ гэсэн хэлбэрт

шилжүүлж болно. А ба Б хэсэгт харгалзах зургийг зурж харууллаа.

А.	Б.
----	----

$D = \{x \mid x \neq 0, x \in \mathbb{R}\}, E = \{y \mid y \neq 0, y \in \mathbb{R}\}$ олонлогууд гэе. $f: D \rightarrow E, f(x) = \frac{cx+d}{ax+b}$ ($a \neq 0, ad - bc \neq 0$) функц нь харилцан нэг утгатай функц тул урвуутай байна. Иймд урвуу функцийг олох алхмуудыг ашиглан урвуу функцийг нь олбол $f^{-1}: E \rightarrow D, f^{-1}(x) = \frac{-bx+d}{ax-c}$ гэж гарна.

Жишээ 9. $f(x) = \frac{x-1}{2x+3}$ функцийн асимптотууд болон урвуу функцийг ол.

Бодолт. $y = q = \frac{1}{2}$ гэсэн хэвтээ асимптот, $x = p = -\frac{3}{2}$ гэсэн босоо асимптоттой байна. Урвуу функц олох алхмуудын дагуу олъё. $y = \frac{x-1}{2x+3}$ томьёоноос x -ийг

у-ээр илэрхийлбэл $x = \frac{-3y-1}{2y-1}$ гэж гарна. Энд x, y -ийн үүргийг сольбол $y = \frac{-3x-1}{2x-1}$

болох тул урвуу функц нь $f^{-1}(x) = \frac{-3x-1}{2x-1}$ гэж олдоно.

Жишээ 10. $f(x) = \frac{4x}{x+1}$, $g(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ функцүүдийн урвуу нь харгалзан $f^{-1}(x)$, $g^{-1}(x)$ бол $f^{-1}(g(a)) = 3$ байх a тоог ол.

Бодолт.

151- 156. Дараах функцүүдийн тодорхойлогдох мужийг ол

$$151. y = \frac{x+2}{x^2-4x+3}$$

$$152. y = \frac{(x-2)(x-1)}{x^3+x^2-x+2}$$

$$153. y = \frac{x^4+1}{x^4-x^3-6x^2-2}$$

$$154. y = \frac{x^5}{2x^3-3x^2+4x+9}$$

$$155. y = \frac{x^2+1}{x^4-2x^3+3x^2+4x+2}$$

$$156. y = \frac{x}{x^8-82x^4+81}$$

157- 162. Дараах функцүүдийн босоо, хэвтээ асимтотуудыг ол.

$$157. y = \frac{5x-2}{2x^2+3x-20}$$

$$158. y = \frac{2x^2+2}{6x^2+5x+1}$$

$$159. y = \frac{-x^4+2}{x^4-4x^2+3}$$

$$160. y = \frac{-\sqrt{5}x+2}{2x^3+2}$$

$$161. y = \frac{3x^3+2}{6x^3-17x^2-26x-8}$$

$$162. y = \frac{5x}{x^4-x^3-13x-15}$$

163-168. Дараах функцүүдийг олон гишүүнт болон хялбар рационал функцүүдийн нийлбэрт задал.

$$163. y = \frac{2x+3}{-3x^2+10x-3}$$

$$164. y = \frac{-3x^2+1}{2x^2-4x-5}$$

$$165. y = \frac{x+2}{x^2(x^2-5x+6)}$$

$$166. y = \frac{x^5-1}{2x^4-x^3}$$

$$167. y = \frac{2x^4-x^3}{x^3+x^2-x+2}$$

$$168. y = \frac{x+2}{x^4-16}$$

169-174. Дараах функцүүдийн графикийг байгуул.

$$169. y = \frac{1-3x}{x}$$

$$170. y = \frac{-x+2}{x+1}$$

$$171. y = \frac{4x}{3-2x}$$

$$172. y = \frac{-2x+1}{x+3}$$

$$173. y = \frac{-4x+12}{2x-3}$$

$$174. y = \frac{-x+2}{x+1}$$

175. а-е -д өгсөн функцүүдийн графикийг зөв харгалзуул. Үүнд:

$$а. y = \frac{3x+2}{x+2} \quad б. y = \frac{3x-10}{x-2} \quad в. y = \frac{3x-2}{x-2} \quad г. y = \frac{3x+10}{x+2} \quad д. y = \frac{-3x-2}{x+2} \quad е. y = \frac{-3x-10}{x+2}$$

176. Хэрэв $y = \frac{k}{x+a} + b$ функцийн график нь зурагт өгсөн бол a, b, k тогтмол тооны нийлбэрийг ол.

177. Хэрэв $y = \frac{bx+c}{ax-1}$ функцийн график нь зурагт өгсөн бол a, b, c тогтмол тооны нийлбэрийг ол.

Бодлого 176-ийн зураг	Бодлого 177-ийн зураг

178. Хэрэв $y = \frac{bx+c}{x+a}$ функцийн график нь $(3, 1)$ цэгийг дайрдаг ба асимптот нь $x = -2, y = 4$ шулуунууд болдог бол a, b, c тогтмол тооны нийлбэрийг ол.

179. Хэрэв $y = \frac{ax+5}{bx+c}$ функцийн график нь $(1, 1)$ цэгийг дайрдаг ба асимптот нь $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{3}$ шулуунууд болдог бол a, b, c тогтмол тооны нийлбэрийг ол.
180. Хэрэв $f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$ функцийн дүр нь $I = \{y \mid y \leq \frac{3}{2}, y \geq 3\}$ бол тодорхойлогдох мужийг ол.
181. Тодорхойлогдох муж нь $|x| > 3$ байх $y = \frac{x}{x-1}$ функцийн дүрийг ол.
182. Хэрэв $f(x) = \frac{ax+b}{2x+c}$ функцийн урвуу функц нь $f^{-1}(x) = \frac{-x+3}{2x-1}$ бол a, b, c тогтмол тоог ол.
183. $f(x) = \frac{-x-3}{2x+1}$ функц өгсөн бол $g(f(x)) = x$ байх $g(x)$ функцийн хувьд $g(3)$ -ыг ол.
184. Хэрэв $f(x) = \frac{2x+5}{x+2}$ функцийн урвууг $f^{-1}(x)$ гэвэл $f^{-1}(f(f^{-1}(3)))$ -ыг ол.
185. Хэрэв $f(x) = \frac{ax+b}{x+1}$ функцийн график нь $(1, 1)$ цэгийг дайрдаг ба $f^{-1}(x) = f(x)$ бол a, b тогтмол тоог ол.
186. $D = \{x \mid x > -1\}$ олонлог дээр тодорхойлогдсон $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ функцийн хувьд $f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1}{x}$ нөхцөлийг хангах x -ийн утгыг ол.
187. $y = \frac{k}{x-2} + 2$ функцийн график ба $y = -x + 10$ шулууны огтлолцлын цэгийг P, Q гэе. PQ хэрчмийн урт нь $4\sqrt{2}$ бол k эерэг бодит тоог ол.
188. Координатын хавтгайд $P(-2, -1)$ цэг өгөв. Q нь $f(x) = \frac{1-x}{2+x}$ функцийн график дээр орших аливаа цэг гэе. PQ хэрчмийн уртын хамгийн бага утгыг m гэвэл m^2 -ыг ол.

Хавсралт. $1 \leq b < 10$ тооны 10 суурьтай логарифм
(Таслалаас хойш 6 орны нарийвчлалтай)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	0.000000	0.004321	0.008600	0.012837	0.017033	0.021189	0.025306	0.029384	0.033424	0.037426
1.1	0.041393	0.045323	0.049218	0.053078	0.056905	0.060698	0.064458	0.068186	0.071882	0.075547
1.2	0.079181	0.082785	0.086360	0.089905	0.093422	0.096910	0.100371	0.103804	0.107210	0.110590
1.3	0.113943	0.117271	0.120574	0.123852	0.127105	0.130334	0.133539	0.136721	0.139879	0.143015
1.4	0.146128	0.149219	0.152288	0.155336	0.158362	0.161368	0.164353	0.167317	0.170262	0.173186
1.5	0.176091	0.178977	0.181844	0.184691	0.187521	0.190332	0.193125	0.195900	0.198657	0.201397
1.6	0.204120	0.206826	0.209515	0.212188	0.214844	0.217484	0.220108	0.222716	0.225309	0.227887
1.7	0.230449	0.232996	0.235528	0.238046	0.240549	0.243038	0.245513	0.247973	0.250420	0.252853
1.8	0.255273	0.257679	0.260071	0.262451	0.264818	0.267172	0.269513	0.271842	0.274158	0.276462
1.9	0.278754	0.281033	0.283301	0.285557	0.287802	0.290035	0.292256	0.294466	0.296665	0.298853
2.0	0.301030	0.303196	0.305351	0.307496	0.309630	0.311754	0.313867	0.315970	0.318063	0.320146
2.1	0.322219	0.324282	0.326336	0.328380	0.330414	0.332438	0.334454	0.336460	0.338456	0.340444
2.2	0.342423	0.344392	0.346353	0.348305	0.350248	0.352183	0.354108	0.356026	0.357935	0.359835
2.3	0.361728	0.363612	0.365488	0.367356	0.369216	0.371068	0.372912	0.374748	0.376577	0.378398
2.4	0.380211	0.382017	0.383815	0.385606	0.387390	0.389166	0.390935	0.392697	0.394452	0.396199
2.5	0.397940	0.399674	0.401401	0.403121	0.404834	0.406540	0.408240	0.409933	0.411620	0.413300
2.6	0.414973	0.416641	0.418301	0.419956	0.421604	0.423246	0.424882	0.426511	0.428135	0.429752
2.7	0.431364	0.432969	0.434569	0.436163	0.437751	0.439333	0.440909	0.442480	0.444045	0.445604
2.8	0.447158	0.448706	0.450249	0.451786	0.453318	0.454845	0.456366	0.457882	0.459392	0.460898
2.9	0.462398	0.463893	0.465383	0.466868	0.468347	0.469822	0.471292	0.472756	0.474216	0.475671
3.0	0.477121	0.478566	0.480007	0.481443	0.482874	0.484300	0.485721	0.487138	0.488551	0.489958
3.1	0.491362	0.492760	0.494155	0.495544	0.496930	0.498311	0.499687	0.501059	0.502427	0.503791
3.2	0.505150	0.506505	0.507856	0.509203	0.510545	0.511883	0.513218	0.514548	0.515874	0.517196
3.3	0.518514	0.519828	0.521138	0.522444	0.523746	0.525045	0.526339	0.527630	0.528917	0.530200
3.4	0.531479	0.532754	0.534026	0.535294	0.536558	0.537819	0.539076	0.540329	0.541579	0.542825
3.5	0.544068	0.545307	0.546543	0.547775	0.549003	0.550228	0.551450	0.552668	0.553883	0.555094
3.6	0.556303	0.557507	0.558709	0.559907	0.561101	0.562293	0.563481	0.564666	0.565848	0.567026
3.7	0.568202	0.569374	0.570543	0.571709	0.572872	0.574031	0.575188	0.576341	0.577492	0.578639

3.8	0.579784	0.580925	0.582063	0.583199	0.584331	0.585461	0.586587	0.587711	0.588832	0.589950
3.9	0.591065	0.592177	0.593286	0.594393	0.595496	0.596597	0.597695	0.598791	0.599883	0.600973
4.0	0.602060	0.603144	0.604226	0.605305	0.606381	0.607455	0.608526	0.609594	0.610660	0.611723
4.1	0.612784	0.613842	0.614897	0.615950	0.617000	0.618048	0.619093	0.620136	0.621176	0.622214
4.2	0.623249	0.624282	0.625312	0.626340	0.627366	0.628389	0.629410	0.630428	0.631444	0.632457
4.3	0.633468	0.634477	0.635484	0.636488	0.637490	0.638489	0.639486	0.640481	0.641474	0.642465
4.4	0.643453	0.644439	0.645422	0.646404	0.647383	0.648360	0.649335	0.650308	0.651278	0.652246
4.5	0.653213	0.654177	0.655138	0.656098	0.657056	0.658011	0.658965	0.659916	0.660865	0.661813
4.6	0.662758	0.663701	0.664642	0.665581	0.666518	0.667453	0.668386	0.669317	0.670246	0.671173
4.7	0.672098	0.673021	0.673942	0.674861	0.675778	0.676694	0.677607	0.678518	0.679428	0.680336
4.8	0.681241	0.682145	0.683047	0.683947	0.684845	0.685742	0.686636	0.687529	0.688420	0.689309
4.9	0.690196	0.691081	0.691965	0.692847	0.693727	0.694605	0.695482	0.696356	0.697229	0.698101
5.0	0.698970	0.699838	0.700704	0.701568	0.702431	0.703291	0.704151	0.705008	0.705864	0.706718
5.1	0.707570	0.708421	0.709270	0.710117	0.710963	0.711807	0.712650	0.713491	0.714330	0.715167
5.2	0.716003	0.716838	0.717671	0.718502	0.719331	0.720159	0.720986	0.721811	0.722634	0.723456
5.3	0.724276	0.725095	0.725912	0.726727	0.727541	0.728354	0.729165	0.729974	0.730782	0.731589
5.4	0.732394	0.733197	0.733999	0.734800	0.735599	0.736397	0.737193	0.737987	0.738781	0.739572
5.5	0.740363	0.741152	0.741939	0.742725	0.743510	0.744293	0.745075	0.745855	0.746634	0.747412
5.6	0.748188	0.748963	0.749736	0.750508	0.751279	0.752048	0.752816	0.753583	0.754348	0.755112
5.7	0.755875	0.756636	0.757396	0.758155	0.758912	0.759668	0.760422	0.761176	0.761928	0.762679
5.8	0.763428	0.764176	0.764923	0.765669	0.766413	0.767156	0.767898	0.768638	0.769377	0.770115
5.9	0.770852	0.771587	0.772322	0.773055	0.773786	0.774517	0.775246	0.775974	0.776701	0.777427
6.0	0.778151	0.778874	0.779596	0.780317	0.781037	0.781755	0.782473	0.783189	0.783904	0.784617
6.1	0.785330	0.786041	0.786751	0.787460	0.788168	0.788875	0.789581	0.790285	0.790988	0.791691
6.2	0.792392	0.793092	0.793790	0.794488	0.795185	0.795880	0.796574	0.797268	0.797960	0.798651
6.3	0.799341	0.800029	0.800717	0.801404	0.802089	0.802774	0.803457	0.804139	0.804821	0.805501
6.4	0.806180	0.806858	0.807535	0.808211	0.808886	0.809560	0.810233	0.810904	0.811575	0.812245
6.5	0.812913	0.813581	0.814248	0.814913	0.815578	0.816241	0.816904	0.817565	0.818226	0.818885
6.6	0.819544	0.820201	0.820858	0.821514	0.822168	0.822822	0.823474	0.824126	0.824776	0.825426
6.7	0.826075	0.826723	0.827369	0.828015	0.828660	0.829304	0.829947	0.830589	0.831230	0.831870
6.8	0.832509	0.833147	0.833784	0.834421	0.835056	0.835691	0.836324	0.836957	0.837588	0.838219
6.9	0.838849	0.839478	0.840106	0.840733	0.841359	0.841985	0.842609	0.843233	0.843855	0.844477
7.0	0.845098	0.845718	0.846337	0.846955	0.847573	0.848189	0.848805	0.849419	0.850033	0.850646

7.1	0.851258	0.851870	0.852480	0.853090	0.853698	0.854306	0.854913	0.855519	0.856124	0.856729
7.2	0.857332	0.857935	0.858537	0.859138	0.859739	0.860338	0.860937	0.861534	0.862131	0.862728
7.3	0.863323	0.863917	0.864511	0.865104	0.865696	0.866287	0.866878	0.867467	0.868056	0.868644
7.4	0.869232	0.869818	0.870404	0.870989	0.871573	0.872156	0.872739	0.873321	0.873902	0.874482
7.5	0.875061	0.875640	0.876218	0.876795	0.877371	0.877947	0.878522	0.879096	0.879669	0.880242
7.6	0.880814	0.881385	0.881955	0.882525	0.883093	0.883661	0.884229	0.884795	0.885361	0.885926
7.7	0.886491	0.887054	0.887617	0.888179	0.888741	0.889302	0.889862	0.890421	0.890980	0.891537
7.8	0.892095	0.892651	0.893207	0.893762	0.894316	0.894870	0.895423	0.895975	0.896526	0.897077
7.9	0.897627	0.898176	0.898725	0.899273	0.899821	0.900367	0.900913	0.901458	0.902003	0.902547
8.0	0.903090	0.903633	0.904174	0.904716	0.905256	0.905796	0.906335	0.906874	0.907411	0.907949
8.1	0.908485	0.909021	0.909556	0.910091	0.910624	0.911158	0.911690	0.912222	0.912753	0.913284
8.2	0.913814	0.914343	0.914872	0.915400	0.915927	0.916454	0.916980	0.917506	0.918030	0.918555
8.3	0.919078	0.919601	0.920123	0.920645	0.921166	0.921686	0.922206	0.922725	0.923244	0.923762
8.4	0.924279	0.924796	0.925312	0.925828	0.926342	0.926857	0.927370	0.927883	0.928396	0.928908
8.5	0.929419	0.929930	0.930440	0.930949	0.931458	0.931966	0.932474	0.932981	0.933487	0.933993
8.6	0.934498	0.935003	0.935507	0.936011	0.936514	0.937016	0.937518	0.938019	0.938520	0.939020
8.7	0.939519	0.940018	0.940516	0.941014	0.941511	0.942008	0.942504	0.943000	0.943495	0.943989
8.8	0.944483	0.944976	0.945469	0.945961	0.946452	0.946943	0.947434	0.947924	0.948413	0.948902
8.9	0.949390	0.949878	0.950365	0.950851	0.951338	0.951823	0.952308	0.952792	0.953276	0.953760
9.0	0.954243	0.954725	0.955207	0.955688	0.956168	0.956649	0.957128	0.957607	0.958086	0.958564
9.1	0.959041	0.959518	0.959995	0.960471	0.960946	0.961421	0.961895	0.962369	0.962843	0.963316
9.2	0.963788	0.964260	0.964731	0.965202	0.965672	0.966142	0.966611	0.967080	0.967548	0.968016
9.3	0.968483	0.968950	0.969416	0.969882	0.970347	0.970812	0.971276	0.971740	0.972203	0.972666
9.4	0.973128	0.973590	0.974051	0.974512	0.974972	0.975432	0.975891	0.976350	0.976808	0.977266
9.5	0.977724	0.978181	0.978637	0.979093	0.979548	0.980003	0.980458	0.980912	0.981366	0.981819
9.6	0.982271	0.982723	0.983175	0.983626	0.984077	0.984527	0.984977	0.985426	0.985875	0.986324
9.7	0.986772	0.987219	0.987666	0.988113	0.988559	0.989005	0.989450	0.989895	0.990339	0.990783
9.8	0.991226	0.991669	0.992111	0.992554	0.992995	0.993436	0.993877	0.994317	0.994757	0.995196
9.9	0.995635	0.996074	0.996512	0.996949	0.997386	0.997823	0.998259	0.998695	0.999131	0.999565

Ашиглах жишээ. $\lg 8.08$ -ыг хүснэгт ашиглан олѐ. Үүний тулд зураг үзүүлснээр хүснэгтээс 8.0 мөр, 8 баганын огтлолцол дахь тоог олох ба энэ нь $\lg 8.08$ -ын утга болно. Иймд $\lg 8.08 = 0.907411$ байна.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
7.6	0.880814	0.881385	0.881955	0.882525	0.883093	0.883661	0.884229	0.884795	0.885361	0.885926
7.7	0.886491	0.887054	0.887617	0.888179	0.888741	0.889302	0.889862	0.890421	0.890980	0.891537
7.8	0.892095	0.892651	0.893207	0.893762	0.894316	0.894870	0.895423	0.895975	0.896526	0.897077
7.9	0.897627	0.898176	0.898725	0.899273	0.899821	0.900367	0.900913	0.901458	0.902003	0.902547
8.0	0.903090	0.903633	0.904174	0.904716	0.905256	0.905796	0.906335	0.906874	0.907411	0.907949
8.1	0.908485	0.909021	0.909556	0.910091	0.910624	0.911158	0.911690	0.912222	0.912753	0.913284
8.2	0.913814	0.914343	0.914872	0.915400	0.915927	0.916454	0.916980	0.917506	0.918030	0.918555
8.3	0.919078	0.919601	0.920123	0.920645	0.921166	0.921686	0.922206	0.922725	0.923244	0.923762