

САНАЛ

Та сурах бичгийн зохиогчийн эхийн талаар дараах асуултад бодитой, бүрэн хариулж бидний ажилд дэмжлэг болно уу. Таны ирүүлсэн санал сурах бичгийн эхийг сайжруулахад чухал ач холбогдолтой байх болно.

Нэг. Ерөнхий мэдээлэл:

Овог, нэр	Сургууль	Мэргэжил	Ажилласан жил	Мэргэжлийн зэрэг	Хүйс

Сурах бичгийн нэр:

Анги:

Хоёр. Агуулга:

Д/д	Шалгуур	Сэдвийн нэр	Тийм	Үгүй	Сайжруулах санал, зөвлөмж
1	Сэдэв бүрд сургалтын цөм хөтөлбөрийн агуулгыг бүрэн тусгасан эсэх				
2	Бичвэр болон бичвэр бус мэдээлэл (бүдүүвч, зураг г.м) нь сэдвийн агуулгатай уялдсан эсэх				
3	Сэдэв бүрийн агуулга нь өмнөх ангийн агуулгатай залгамж холбоо, логик дэс дараалалтай эсэх				
4					

Гурав. Арга зүй, даалгавар:

Д/д	Шалгуур	Сэдэв, даалгаврын дугаар	Тийм	Үгүй	Сайжруулах санал, зөвлөмж
1	Бүлэг, сэдвийг судлах зааварчилгаа нь ойлгомжтой эсэх				
2	Дасгал, даалгавар нь агуулгатай нийцэж буй эсэх				
3	Ойлгомжгүй, хариу гарахгүй даалгавар, тохиолдол, дадлага ажил, сорил буй эсэх				
4	Өөрийгөө үнэлэх үнэлгээний даалгаврыг тусгасан эсэх				
5					

Дөрөв. Хэл найруулга, зураг дизайн:

Д/д	Шалгуур	Сэдэв, даалгаврын дугаар	Сайжруулах санал, зөвлөмж
1	Найруулгатай холбоотой		
2	Зөв бичгийн дүрэмтэй холбоотой		
3	Мэргэжлийн үг, хэллэгтэй холбоотой		
4			

Амжилт хүсье.

Гарчиг

I БҮЛЭГ. ТЭГШИТГЭЛ БА ТЭНЦЭТГЭЛ БИШ

- 1.1. Тооны модул
- 1.2. Модул агуулсан шугаман тэгшитгэл
- 1.3. Модул агуулсан шугаман тэнцэтгэл биш

II БҮЛЭГ. ОЛОН ГИШҮҮНТ

- 2.1. Олон гишүүнт, олон гишүүнтийн нэмэх, хасах үйлдэл
- 2.2. Адилтгал тэнцүү илэрхийлэл
- 2.3. Олон гишүүнтийн язгуур
- 2.4. Олон гишүүнтийн хуваах үйлдэл
- 2.5. Безугийн теорем.
- 2.6. Алгебрын рационал бутархайг олон гишүүнт болон хялбар рационал бутархайн нийлбэр болгон задлах

III БҮЛЭГ. ФУНКЦ БА ГРАФИК

- 3.1. Тооны логарифм
- 3.2. Логарифмын чанар
- 3.3. Хялбар илтгэгч тэгшитгэл, тэнцэтгэл биш
- 3.4. Логарифм функц
- 3.5. e тоо
- 3.6. $y = e^x$ ба $y = \ln x$ функц
- 3.7. Рационал функц

IV БҮЛЭГ. ФУНКЦИЙН УЛАМЖЛАЛ

- 4.1. $y = e^x$ функцийн уламжлал
- 4.2. $y = \ln x$ функцийн уламжлал
- 4.3. Синус ба косинус функцийн уламжлал
- 4.4. Үржвэрийн уламжлал
- 4.5. Нөгдвөрын уламжлал
- 4.6. Тангенс функцийн уламжлал
- 4.7. Давхар функцийн уламжлал

V БҮЛЭГ. ИНТЕГРАЛ

- 5.1. Илтгэгч болон зарим тригонометрийн функцийн интеграл
- 5.2. Рационал функцийн интеграл
- 5.3. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ хэлбэрийн интеграл
- 5.4. Тодорхой болон тодорхой биш интегралыг бодох орлуулгын арга

VI БҮЛЭГ. МАГАДЛАЛ БА СТАТИСТИК

- 6.1. Дискрет санамсаргүй хувьсагч
- 6.2. Математик дундаж

VII БҮЛЭГ. КОМПЛЕКС ТОО

- 7.1. Комплекс тоо түүний бодит ба хуурмаг хэсэг
- 7.2. Комплекс тоон дээр хийх үйлдэл
- 7.3. Хоёр комплекс тоо тэнцүү байх нөхцөл
- 7.4. Комплекс тооны урвуу ба нөгдвөр
- 7.5. Комплекс тооны модуль ба хосмог
- 7.6. Бодит коэффициенттэй квадрат тэгшитгэлийн комплекс тоон шийд
- 7.7. Комплекс тооны геометр утга

I БҮЛЭГ. ТЭГШИТГЭЛ, ТЭНЦЭТГЭЛ БИШ

Энэ бүлэг сэдвийг судалснаар дараах мэдлэг, чадварыг эзэмшинэ.

- Бодит тооны модуль ухагдахуунтай танилцаж тооны модулыг олох.
- Модуль агуулсан $|ax + b| = c$, $|ax + b| = cx + d$, $|ax + b| = |cx + d|$ хэлбэрийн тэгшитгэл бодох.
- Модуль агуулсан $|ax + b| > c$, $|ax + b| > cx + d$, $|ax + b| > |cx + d|$ ($\geq, <, \leq$) хэлбэрийн тэнцэтгэл бишийг бодох.

1.1. Тооны модуль.

Тодорхойлолт: x бодит тооны хувьд хэрэв $x \geq 0$ бол $|x| = x$ тоог, хэрэв $x < 0$ бол $|x| = -x$ тоог түүний модуль (абсолют хэмжигдэхүүн) гэдэг. x бодит тооны модулыг $|x|$ гэж тэмдэглэнэ. Тодорхойлолт ёсоор аливаа бодит x тооны модуль $|x| \geq 0$ байна.

Жишээ 1.

$$|5| = 5, \quad |-3,4| = -(-3,4) = 3,4$$

$$\left| -\frac{3}{10} \right| = -\left(-\frac{3}{10} \right) = \frac{3}{10}$$

$$|2,23| = 2,23$$

$$|\sqrt{24} - 5| = 5 - \sqrt{24} \quad (5 = \sqrt{25} > \sqrt{24})$$

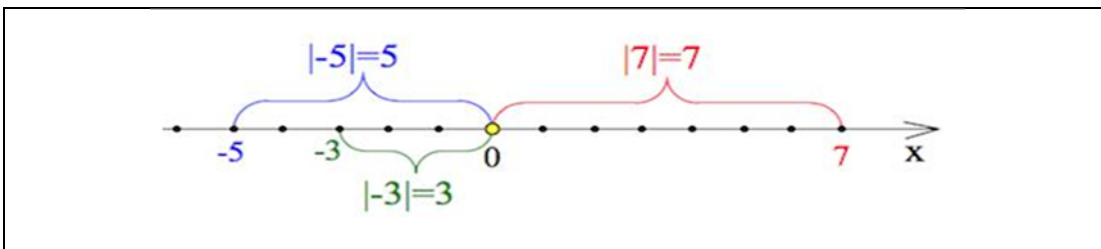
$$\left| \cos \frac{3\pi}{4} \right| = -\cos \frac{3\pi}{4} \quad \left(\frac{3\pi}{4} \text{ II мөчийн өнцөг тул } \cos \frac{3\pi}{4} \text{ тоо нь сөрөг утгатай} \right)$$

$$|0| = 0$$

Модулын геометр утга.

Тоон шулууны $A(x)$ цэгээс тоон шулууны эх $O(0)$ хүртэлх зайн тоон утгыг x тооны модуль $|x|$ гэнэ.

Жишээ 2. $|-5|$, $|-3|$, $|7|$ -ийн геометр утга нь



байна.

Дасгал 1. Тооны модулыг ол.

а. $|-15|$ б. $|4,45|$ в. $\left| -3\frac{1}{4} \right|$ г. $|\sqrt{5} - 3|$ д. $|\cos(-45^\circ)|$ е. $|5^{-10}|$

ё. $|\sin 190^\circ|$ ж. $|\sqrt{3} - 2|$ з. $|x^2 + 1|$ и. $|x^2 + 2x + 2|$ й. $|\log_3 2|$

к. $|\sqrt[3]{7} - 2|$ л. $|-12^{-13}|$ м. $|\sqrt[4]{3} - \sqrt[3]{4}|$ н. $|5^{10} - 10^5|$

1.2. Модул агуулсан шугаман тэгшитгэл.

Тодорхойлолт: $|ax + b| = c$, $|ax + b| = cx + d$, $|ax + b| = |cx + d|$ хэлбэрийн тэгшитгэлүүдийг модултай шугаман тэгшитгэл гэнэ.

$|ax + b| = c$ хэлбэрийн тэгшитгэл бодох.

Жишээ 1. $|x + 5| = 3$ тэгшитгэлийг бод.

Бодолт. I арга.

Хэрэв $x + 5 \geq 0$ буюу $x \geq -5$ бол тодорхойлолт ёсоор $|x + 5| = x + 5$ болно. Иймд $x + 5 = 3$ тэгшитгэл гарах ба $x = -2$ гэж олдоно. Энэ нь $x \geq -5$ байх нөхцөлийг хангаж буй тул шийд болно.

Хэрэв $x + 5 < 0$ буюу $x < -5$ бол $|x + 5|$ нь тодорхойлолтоор $-(x + 5)$ болно. Тэгвэл $-(x + 5) = 3$ тэгшитгэл гарах ба эндээс $x = -8$ гэж олдоно. Энэ нь $x < -5$ нөхцөлийг хангаж буй тул мөн шийд болно. Иймд тэгшитгэл $\{-8; -2\}$ гэсэн хоёр шийдтэй байна.

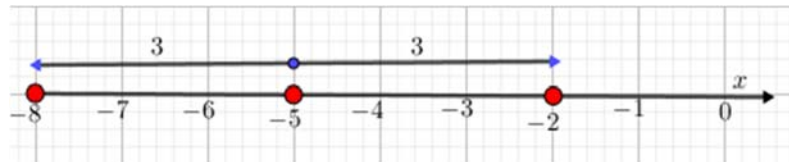
Өөрөөр хэлбэл $|x + 5| = 3$ тэгшитгэлийг

$$\begin{cases} x + 5 \geq 0 \\ x + 5 = 3 \end{cases} \text{ ба } \begin{cases} x + 5 < 0 \\ -(x + 5) = 3 \end{cases}$$

системүүдээр сольж болно гэсэн үг юм. Системүүдийг бодож $\{-8, -2\}$ шийдүүдийг оллоо.

Бодолт. II арга. Геометр арга.

$|x + 5| = |x - (-5)| = 3$ тул бидний олох x тоо нь тоон шулуун дээрх $A(-5)$ цэгээс 3 нэгж зайтай цэгүүдийн координат байна.



Иймд x нь $\{-8; -2\}$ байна.

Жишээ 2. $|2x - 5| = -7$ тэгшитгэлийн бод.

Бодолт. Модулын тодохойлолт ашиглан модулаас чөлөөлбөл

$\begin{cases} 2x - 5 \geq 0 \\ 2x - 5 = -7 \end{cases}$ ба $\begin{cases} 2x - 5 < 0 \\ -(2x - 5) = -7 \end{cases}$ болно. Эдгээрийг бодвол $\begin{cases} x \geq 5/2 \\ x = -1 \end{cases}$ ба $\begin{cases} x < 5/2 \\ x = 6 \end{cases}$ болох ба эхний системээс $x = -1$ тоо нь $5/2$ тооноос их нь худлаа тул шийдгүй байна. Дараагийн системээс $x = 6$ тоо нь $5/2$ тооноос бага нь худлаа тус шийдгүй байна. Иймд тэгшитгэл шийдгүй.

Нөгөө талаас $(2x - 5)$ бодит тооны модул $|2x - 5|$ нь ямагт эерэг бодит тоо байх тул өгөгдсөн тэгшитгэл шийдгүй гэдгийг шууд харж болно. Өөрөөр хэлбэл $|f(x)| = a$ хэлбэрийн тэгшитгэлд $a < 0$ бол тэгшитгэл шийдгүй байна.

Дүгнэлт. $|f(x)| = a$ хэлбэрийн тэгшитгэл нь

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = a \end{cases} \text{ ба } \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) = a \end{cases}$$

систем тэгшитгэлүүдийн нэгдэлтэй тэнцүү чанартай байна.

Дасгал 2. Тэгшитгэл бод.

а. $|x| = 8$ б. $|6x - 12| + 7 = 19$ в. $|x| - 5 = 8$ г. $15 - |4x - 7| = 8$

д. $5|x + 14| = 30$ е. $|5 - |x|| = 4$ ё. $||2x - 3| - 4| = 6$

ж. $||1 - 2x| - 5| = 7$ з. $2|x - 1| + 3 = 9 - |x - 1|$

и. $|3x - 1| = 2|3x - 1| - 2$ к. $3|5x + 1| = 4|5x + 1| + 6$

 $|ax + b| = cx + d$ хэлбэрийн тэгшитгэл бодох.**Жишээ 3.** $|3x - 2| = 11 - x$ тэгшитгэлийг бод.**Бодолт.** Хэрэв $3x - 2 \geq 0$ буюу $x \geq 2/3$ бол $|3x - 2| = 3x - 2$ байна. Иймд $3x - 2 = 11 - x$ болох ба эндээс $x = 13/4$ гэсэн шийд олно. Энэ нь $x \geq 2/3$ нөхцөлийг хангах тул шийд болно.Хэрэв $3x - 2 < 0$ буюу $x < 2/3$ бол $|3x - 2| = -(3x - 2)$ байна. Иймд $-(3x - 2) = 11 - x$ тэгшитгэлийг бодвол $x = -9/2$ гэж олно. Энэ нь $x < 2/3$ нөхцөлийг хангах тул шийд болно.

Өөрөөр хэлбэл $\begin{cases} 3x - 2 \geq 0 \\ 3x - 2 = 11 - x \end{cases}$ ба $\begin{cases} 3x - 2 < 0 \\ -(3x - 2) = 11 - x \end{cases}$

системүүд рүү шилжнэ. Эдгээр системүүдийн шийдүүдийн нэгдэл нь анхны тэгшитгэлийн шийд болно.

Жишээ 4. $|2 - 5x| = 6 - x$ тэгшитгэлийн бод

Бодолт. $\begin{cases} 2 - 5x \geq 0 \\ 2 - 5x = 6 - x \end{cases}$ ба $\begin{cases} 2 - 5x < 0 \\ -(2 - 5x) = 6 - x \end{cases}$ системийг бодох бодлогод шилжинэ.

Эдгээрийг бодвол $\begin{cases} x \leq 2/5 \\ x = -1 \end{cases}$ ба $\begin{cases} x > 2/5 \\ x = 4/3 \end{cases}$ болж $\{-1; 4/3\}$ гэсэн шийдүүд олно.

Дүгнэлт. $|f(x)| = g(x)$ хэлбэрийн тэгшитгэл нь

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \text{ ба } \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) = g(x) \end{cases}$$

систем тэгшитгэлүүдийн нэгдэлтэй тэнцүү чанартай байна.

Дасгал 3. Тэгшитгэл бод.

а. $|7 + 5x| = 5x + 7$ б. $|4x - 7| = 7 - 4x$ в. $-2|x + 4| = 3 - 4x$

г. $|2x - 3| = 4 - x$ д. $|5x - 15| + |6x - 18| = 0$

е. $|4x + 6| + 8| = |-10|$ ё. $|x + 3| = 2x - 3$ ж. $|5x + 4| = x - 1$

з. $|-x - 2| = 3x - 5$ и. $|10x - 20| + |14x - 56| = 0$

й. $|1 - 5x| = |2 - x|$ к. $|-4x + 7| = -x$

л. $x^2 - 6x + 8 + |x - 4| = 0$ м. $3|x + 2| + x^2 + 6x + 2 = 0$

Дасгал 4. Тэгшитгэл бод.

а. $||x + 3| + x| = 1$ б. $||x + 2| + x| = 1$ в. $||2x - 3| + x| = 3$

г. $||3 - 2x| - x| = 2$ д. $||5x + 3| - 2x| = 4$

е. $||7x - 6| - 3x| = 5$

Дасгал 5. Тэгшитгэл бод.

а. $|x^2 - 8| = 17$ б. $|x^2 - 12| = 4$ в. $|x^2 - 2x - 1| - x + 1 = 0$

г. $|x^2 - 2x - 4| = 3x - 2$ д. $|x^2 - 3x| = 2x - 4$

е. $|x^2 - 3x| + x = 2$

$|ax + b| = |cx + d|$ хэлбэрийн тэгшитгэл.

Жишээ 5. $|x - 12| = |3x + 1|$ тэгшитгэлийг бод.

Бодолт. Модулын тодохойлолт ашиглан бодъё.

$|x - 12|$ илэрхийлэл $x \geq 12$ бол $|x - 12| = x - 12$, хэрэв $x < 12$ бол $|x - 12| = -(x - 12)$ байна.

$|3x + 1|$ илэрхийлэл $x \geq -1/3$ бол $|3x + 1| = 3x + 1$, хэрэв $x < -1/3$ бол

$|3x + 1| = -(3x + 1)$ байна.

Иймд тэгшитгэлээ дараах гурван завсарт бодъё.

а) Хэрэв $x < -1/3$ бол тэгшитгэлээ $-(x - 12) = -(3x + 1)$ гэж бичээд бодвол $x = -13/4$ шийд олно. Энэ нь $x < -1/3$ гэсэн нөхцөлийг хангах тул шийд болно.

б) Хэрэв $-\frac{1}{3} \leq x < 12$ бол тэгшитгэлээ $-(x - 12) = 3x + 1$ гэж бичээд бодвол $x = 11/4$ шийд олно. Энэ нь $-\frac{1}{3} \leq x < 12$ нөхцөлийг хангах тул шийд болно.

в) Хэрэв $x \geq 12$ бол тэгшитгэлээ $x - 12 = 3x + 1$ гэж бичээд бодвол

$x = -13/2$ шийд олдох ба энэ нь $x \geq 12$ нөхцөлийг хангахгүй тул шийд болохгүй.

Нөгөө талаас $|x - 12| = |3x + 1|$ тэгшитгэлийг модулаас $\begin{cases} x - 12 = 3x + 1 \\ x - 12 = -(3x + 1) \end{cases}$ гэж чөлөөлөхөд хангалттай юм.

Жишээ 6. $|4x - 5| = |2 - x|$ тэгшитгэлийг бод.

Бодолт. Өгсөн тэгшитгэлийг $\begin{cases} 4x - 5 = 2 - x \\ 4x - 5 = -(2 - x) \end{cases}$ системээр солих ба эндээс $x = 7/5$, $x = 1$ гэж олно.

Дүгнэлт.

$|f(x)| = |g(x)|$ хэлбэрийн тэгшитгэл нь

$$f(x) = g(x) \text{ ба } f(x) = -g(x)$$

тэгшитгэлүүдийн нэгдэлтэй тэнцүү чанартай байна.

Дасгал 6.

- а. $|3x - 8| = |x + 1|$ б. $|3x + 5| = |5 - x|$
в. $|x - 2| = |x - 4|$ г. $2|2x - 5| = |x - 1/2|$
д. $|-x - 1| = |2x + 3|$ е. $|6x - 1| = |-5x + 6|$
ё. $|7x - 8| = |8x - 7|$ ж. $|3x + 5| = |3 + 5x|$
з. $|-x| = |x - 1|$ и. $|x| = |4 - x|$

Дасгал 7. Тэгшитгэл бод.

- а. $|3x^2 + 5x - 9| = |6x + 15|$ б. $|x^2 - 13x + 35| = |35 - x^2|$
в. $|x^2 + x - 3| = |5x - 4|$ г. $2|x^2 + 2x - 5| = |x - 1|$
д. $|x^2 + x - 1| = |2x - 1|$ е. $|2x^2 + 6x - 1| = |x + 6|$

1.3. Модул агуулсан шугаман тэнцэтгэл биш.

Тодохойлолт: $|ax + b| > c$, $|ax + b| > cx + d$, $|ax + b| > |cx + d|$ ($\geq, <, \leq$) хэлбэрийн тэнцэтгэл бишийг модультай шугаман тэнцэтгэл биш гэнэ.

$|ax + b| > c$, ($<, \leq, \geq$) хэлбэрийн тэнцэтгэл бишийг бодох.

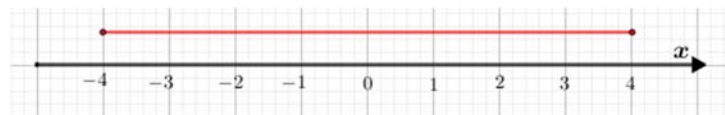
Жишээ 1. $|x| \leq 4$ тэнцэтгэл бишийг бод.

Бодолт. I арга. Хэрэв $x \geq 0$ бол $x \leq 4$ байна. Иймд $[0; 4]$ гэсэн шийд олдоно.

Хэрэв $x < 0$ бол $-x \leq 4$ буюу $x \geq -4$ байна. Эндээс $[-4; 0[$ гэж гарна. Дээрх хоёр шийдүүдээ нэгтгэвэл $[-4; 4]$ байна.

Бодолт. II арга. Геометр арга.

Өгсөн тэгшитгэлээ $|x - 0| \leq 4$ гэвэл тоон шулууны эх $O(0)$ цэгээс 4-өөс багагүй зайтай цэгүүдийн олонлог нь өгсөн тэнцэтгэл бишийн шийд байна. Өөрөөр хэлбэл өгсөн тэнцэтгэл бишийн шийд $[-4; 4]$ муж байна.



Жишээ 2. $|x - 5| > 8$ тэнцэтгэл бишийг бодъё.

Бодолт. Хэрэв $x - 5 \geq 0$ буюу $x \geq 5$ бол тэнцэтгэл биш $x - 5 > 8$ болох ба $x > 13$ гэж гарна. Энд $x \geq 5$ нөхцөлийг тооцвол $]13; \infty[$ муж өгсөн тэнцэтгэл бишийн шийд болно.

Хэрэв $x - 5 < 0$ буюу $x < 5$ бол тэнцэтгэл биш $-(x - 5) > 8$ болох ба $x < -3$ гэж гарна. $x < 5$ нөхцөлийг тооцвол $]-\infty; -3[$ муж өгсөн тэнцэтгэл бишийн шийд болно. Иймд дээрх шийдүүдийг нэгтгэвэл өгсөн тэнцэтгэл бишийн шийд $]-\infty; -3[\cup]13; +\infty[$ гэж гарна.

Жишээ 3. $|x - 7| \leq 10$ тэнцэтгэл бишийг бод.

Бодолт. Хэрэв $x - 7 \geq 0$ буюу $x \geq 7$ бол $x - 7 \leq 10$ болох ба $x \leq 17$ байна. $x \geq 7$ байна гэдгийг тооцвол $[7; 17]$ гэж гарна.

Хэрэв $x - 7 < 0$ буюу $x < 7$ бол $-(x - 7) \leq 10$ болох ба $x \geq -3$ байна. $x < 7$ нөхцөлийг тооцвол $[-3; 7[$ гэж гарна. Дээрх хоёр шийдийг нэгтгэвэл өгсөн тэнцэтгэл бишийн шийд $[-3; 17]$ гэж гарна.

Дүгнэлт. $|f(x)| > a$ хэлбэрийн тэнцэтгэл биш нь

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) > a \end{cases} \text{ ба } \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) > a \end{cases}$$

гэсэн систем тэнцэтгэл бишүүдийн нэгдэлтэй тэнцүү чанартай байна.

$|ax + b| > cx + d, (<, \leq, \geq)$ хэлбэрийн тэнцэтгэл бишийг бодох.

Жишээ 4. $|x + 2| > 2x$ тэнцэтгэл бишийг бод.

Бодолт. Хэрэв $x + 2 \geq 0$ буюу $x \geq -2$ бол тэнцэтгэл биш $x + 2 > 2x$ болох ба $x < 2$ гэж гарна. $x \geq -2$ тул $[-2; 2[$ гэсэн муж өгсөн тэнцэтгэл бишийн шийд болно.

Хэрэв $x + 2 < 0$ буюу $x < -2$ бол тэнцэтгэл биш $-(x + 2) > 2x$ болох ба $x < -\frac{2}{3}$ гэж гарна. $x < -2$ тул $]-\infty; -2[$ муж өгсөн тэнцэтгэл бишийн шийд болно. Иймд дээрх шийдүүдийг нэгтгэвэл тэнцэтгэл бишийн шийд $]-\infty; 2[$ гэж гарна.

Жишээ 5. $|2x + 4| < 3 + x$ тэнцэтгэл бишийг бод.

Бодолт. Хэрэв $2x + 4 \geq 0$ буюу $x \geq -2$ бол тэнцэтгэл биш $2x + 4 < 3 + x$ болох ба $x < -1$ гэж гарна. $x \geq -2$ тул $[-2; -1[$ муж өгсөн тэнцэтгэл бишийн шийд болно.

Хэрэв $2x + 4 < 0$ буюу $x < -2$ бол тэнцэтгэл биш $-(2x + 4) < 3 + x$ болох ба $x > -\frac{7}{3}$ гэж гарна. $x < -2$ тул $]-\frac{7}{3}; -2[$ муж өгсөн тэнцэтгэл бишийн шийд болно.

Иймд дээрх шийдүүдээ нэгтгэвэл $(-\frac{7}{3}; -1)$ гэсэн муж тэнцэтгэл бишийн шийд болно.

Дүгнэлт.

$|f(x)| > g(x)$ хэлбэрийн тэнцэтгэл биш нь

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \text{ ба } \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) > g(x) \end{cases}$$

гэсэн систем тэнцэтгэл бишүүдийн нэгдэлтэй тэнцүү чанартай байна.

$|ax + b| > |cx + d|, (<, \leq, \geq)$ хэлбэрийн тэнцэтгэл бишийг бодох

Жишээ 6. $|6x - 5| > |7x - 8|$ тэнцэтгэл бишийг бод.

Бодолт. $|6x - 5| > |7x - 8|$ энэ тэнцэтгэл биш нь $(6x - 5)^2 > (7x - 8)^2$ гэсэн тэнцэтгэл биштэй тэнцүү чанартай байна. Үүнийг тэнцэтгэл бишийн нэг талд гаргаж, үржигдэхүүн болгон задалбал

$(6x - 5 - 7x + 8)(6x - 5 + 7x - 8) > 0$ буюу $(-x + 3)(13x - 13) > 0$ гэдгээс тэнцэтгэл бишийн шийд $]1; 3[$ гэж олдоно.

Дүгнэлт.

$|f(x)| > |g(x)|$ хэлбэрийн тэнцэтгэл биш нь

$f^2(x) > g^2(x)$ буюу $(f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) > 0$

гэсэн тэнцэтгэл биштэй тэнцүү чанартай байна.

Дасгал 8

а. $|4 + 2x| < 5$ б. $|6x - 5| > 3$ в. $|5 - 2x| \leq 7$ г. $|x + 2| \geq 3$

д. $|5 - 3x| + 5 > 8$ е. $|8 - 5x| + 9 < 13$ ё. $|5x + 1| + 2 \geq 3|1 + 5x|$

ж. $|7x - 5| + 4 \leq 2|5 - 7x|$ з. $0 < |x - 1| \leq 4$ и. $0 \leq |x + 5| < 5$

й. $\begin{cases} |0.5 - x| < 3 \\ |x - 3| < 1 \end{cases}$ к. $\begin{cases} |2x - 5| < 3 \\ |5 - 0.5x| < 1 \end{cases}$ л. $|2x - 3| - 4| < 6$ м. $||1 - 2x| - 3| > 5$

Чанар 1: Аливаа $x \in R$ тоо бүрийн хувьд $|x|^2 = x^2$ тэнцэтгэл биелнэ.

Баталгаа.

Хэрэв $x \geq 0$ бол тэнцэтгэл биелэх нь илэрхий.

Хэрэв $x < 0$ бол $|x| = -x$ ба $(-x)^2 = x^2$ тул үнэн байна.

Жишээ 7. $x^2 - 5|x| + 6 \geq 0$ тэнцэтгэл биш бод.

Бодолт. $|x|^2 = x^2$ тул бид тэнцэтгэл бишээ $|x|^2 - 5|x| + 6 \geq 0$ гэж бичиж болно.

Тэгвэл $|x| = y$ гэж орлуулбал өгсөн тэнцэтгэл биш $y^2 - 5y + 6 \geq 0$ болох ба

үржвэрт задалж $(y - 2)(y - 3) \geq 0$ интервалын арга хэрэглэвэл $y \in]-\infty; 2] \cup [3; +\infty[$

гэж гарна. Орлуулгаа буцаавал өгсөн тэнцэтгэл биш

$|x| \leq 2, |x| \geq 3$ гэсэн тэнцэтгэл бишүүдийн нэгдэлд тавигдана.

$|x| \leq 2$ -ийн шийд $[-2; 2]$ ба $|x| \geq 3$ -ийн шийд $]-\infty; -3] \cup [3; +\infty[$ гэж гарах тул эдгээрийг нэгтгэвэл тэнцэтгэл бишийн шийд $]-\infty; -3] \cup [-2; 2] \cup [3; +\infty[$ болно.

Дасгал 9.

а. $x^2 - 5|x| + 6 < 0$ б. $x^2 - |x| - 2 \geq 0$ в. $x^2 - 6|x| + 8 = 0$

г. $x^2 + 2x - 3|x + 1| + 3 = 0$ д. $x^2 + x - |2x + 1| + 1 = 0$

е. $(x + 3)^2 + 5|x + 3| - 6 \leq 0$ ё. $(2x + 1)^2 - |2x + 1| - 12 \geq 0$

Чанар 2: Аливаа $a, b \in \mathbb{R}$ тоонуудын хувьд $|a| = |b|$ бол $a^2 = b^2$ тэнцэтгэл биелнэ.

Баталгаа. Тэнцэтгэлийн хоёр талыг квадрат зэрэгт дэвшүүлж Чанар 1-ийг ашиглавал тэнцэтгэл батлагдана.

Жишээ 8. $|x - 4| = |2 - 3x|$ тэгшитгэл бодъё.

Бодолт. Чанар 2 ёсоор модулаас чөлөөлье.

$(x - 4)^2 = (2 - 3x)^2$ гэдгээс $x^2 - 8x + 16 = 4 - 12x + 9x^2$ буюу $8x^2 - 4x - 12 = 0$ болно. Энэ тэгшитгэлийг бодвол $\{-1; 3/2\}$ шийдүүд олдоно.

Хэрэв модул доторх илэрхийлэл нэгээс дээш зэрэгтэй бол энэ аргыг ашиглах нь тэгшитгэлийг төвөгтэй болгохыг анхаарах хэрэгтэй.

Дасгал 10.

- а. $|x - 5| = |x + 3|$ б. $|-x + 6| = |-x|$
в. $|2x - 5| = |x|$ г. $2|7 - x| = |x - 2|$
д. $|-x - 4| = |x + 3|$ е. $|6x| = |5x + 8|$
ё. $|9x - 4| = |4x - 9|$ ж. $|x + 5| = |-x - 5|$

Чанар 3: Аливаа $x \in \mathbb{R}$ тооны хувьд $|x| = \sqrt{x^2}$ тэнцэтгэл биелнэ.

Баталгаа. Хэрэв $x \geq 0$ бол $|x| = x$ ба $\sqrt{x^2} = x$ тул үнэн байна.

Хэрэв $x < 0$ бол $|x| = -x$ ба $\sqrt{x^2} = -x$ тул үнэн байна.

Иймд $x \in \mathbb{R}$ тоо бүрийн хувьд $|x| = \sqrt{x^2}$ тэнцэтгэл үнэн байна.

Санамж. $\sqrt{(-5)^2} = -5$ гэж бодвол буруу болох ба $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$ нь зөв юм.

Жишээ 9. $\sqrt{x^2 - 2x + 1} < 2$ тэнцэтгэл бишийг бод.

Бодолт. $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = \sqrt{(x - 1)^2}$ гэдгээс чанар 2 ёсоор $|x - 1| < 2$ гэж хувиргаж болно. Модулын чанар ёсоор $x - 1 \geq 0$ бол $x - 1 < 2$ болох ба $x < 3$ байна. Үүнийг

$x \geq 1$ гэдэгтэй огтлолцуулбал $[1; 3[$ муж тэнцэтгэл бишийн шийд болно.

Хэрэв $x - 1 < 0$ бол $-(x - 1) < 2$ буюу $x > -1$ байна. Үүнийг $x < 1$ гэдэгтэй огтлолцуулбал $] -1; 1[$ муж тэнцэтгэл бишийн шийд байна. Эцэст нь дээрх хоёр шийдээ нэгтгэвэл тэнцэтгэл бишийн шийд $] -1; 3[$ болно.

Дасгал 11.

- а. $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} > 2$ б. $\sqrt{4x^2 - 12x + 9} < 1$ в. $\sqrt{9x^2 - 6x + 1} \geq |x + 1|$
г. $\sqrt{4x^2 - 20x + 25} \geq |3x - 1|$ д. $\sqrt{x^2} > \sqrt{x^2 - 2x + 1}$
е. $\sqrt{x^2} \leq \sqrt{25x^2 - 40x + 16}$

БҮЛГИЙН НЭМЭЛТ ДААЛГАВАР.

Дасгал 1. Тэгшитгэл бод.

- а. $|5 - 4x| = 1$ б. $|2 - 5x| = 16$ в. $|5 - 3x| = 4$ г. $|4x - 1| = 7$
д. $|3x - 3| = 6$ е. $|5x + 4| = 10$ ё. $|10x - 2| = 4$ ж. $|5 - 3x| = 2x + 1$
з. $|2x - 3| = 3 - 2x$ и. $3x = 2 - |3 - x|$ й. $|2x + 4| = 3x + 2$ к. $|x| = x$
л. $|2 - x| = 5 - 4x$ м. $||x| + 2| = 2$ н. $||x| - 2| = 2$ о. $||x - 1| + 3| = 3$

Дасгал 2. Тэгшитгэл бод.

- а. $2 - |x| = 4(|x| + 3) - |x|$ б. $2(4 - |x + 3|) = -3(|x + 3| - 2) + 3$
в. $||x + 3| - 1| + 2| - 3 = 0$ г. $||x + 4| - 1| + 3| - 4 = 0$

Дасгал 3. Тэгшитгэл бод.

- а. $|x| = |2x - 5|$ б. $|2x| = |2 + x|$ в. $|2x - 1| = |x + 3|$
г. $|x - 4| - |x + 4| = 8$ д. $|2x - 1| + 6x = |2x - 4| + 15$
е. $|x + 1| = |2(x - 1)|$ ё. $|4(x - 6)| = |x + 9|$ ж. $|x + 5| = |x + 10|$
з. $|y - 2| = |1 + 3y|$

Дасгал 4. Тэгшитгэл бод.

- а. $|x^2 - 5x + 4| = 0$ б. $|x^2 + 4x - 3| = 2$ в. $|x^2 - 4x| = 5$
г. $|x^2 - 6x + 4| = 4$ д. $3x + |x^2 + x| = 5$ е. $|x + 2| - |x^2 - 4| = 0$
ё. $|x^2 - 1| - |x + 1| = 0$

Дасгал 5. Тэгшитгэл бод.

- а. $|2x - 12| = |2x^2 - 10x + 18|$ б. $|x - 1| = |x^2 - 3x + 2|$
в. $|x - 6| = |x^2 - 5x + 9|$ г. $|6x + 15| = |3x^2 + 5x - 9|$
д. $|x^2 - 6x + 7| = |3x - 11|$

Дасгал 6. Тэгшитгэл бод.

- а. $|35 - x^2| = |x^2 - 13x + 35|$ б. $|x^2 + 6x + 3| = |x^2 + 4x + 5|$
в. $|2x - 3| = 3 - 2x$ г. $x^2 - 5|x| - 24 = 0$ д. $(x - 7)^2 - |x - 7| = 30$
е. $(x + 1)^2 + |x + 1| - 2 = 0$ ё. $x^2 - 4|x - 3| - 7x + 11 = 0$
ж. $|x^2 - 5x + 6| = -x^2 + 5x - 6$ з. $||3 - x| - 2x + 1| = 4x - 10$
и. $|2x + 1| = 2x^2 + 1$ й. $x^2 - |3x - 3| = 2x + 3$ к. $x|2x + 5| + 2x|x - 3| = 22$

Дасгал 7. Тэгшитгэл бод.

- а. $\sqrt{x^2 + 6x + 9} + \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 5$ б. $1 + \sqrt{x^2 + 2x + 1} = 3x - 2$

в. $3\sqrt{x^2 + 6x + 9} + 2\sqrt{x^2} = 7$ г. $\sqrt{x^2} - \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 2$

Дасгал 8. Тэнцэтгэл биш бод.

а. $|x + 3| > 1$ б. $|x - 2| < 2$ в. $|2x - 5| - |x - 4| < 0$

г. $|x - 2| - |3x - 2| < 0$ д. $|x| > 5 + 2x$ е. $|x| \leq 3 - 2x$

ж. $3 \leq |2x - 1| < 5$ з. $3 \leq |4 - 3x| < 6$

Дасгал 9. Тэнцэтгэл биш бод.

а. $\begin{cases} |x| \geq 1 \\ |x - 1| < 3 \end{cases}$ б. $\begin{cases} |x^2 - 4x| < 5 \\ |x + 1| < 3 \end{cases}$

в. $\begin{cases} |x^2 + 5x| < 6 \\ |x + 1| \leq 1 \end{cases}$ г. $\begin{cases} |x^2 + 5x| < 6 \\ |x + 1| < 2 \end{cases}$

Дасгал 10. Тэнцэтгэл биш бод.

а. $|x - 3| > 2x$ б. $|3x + 5| < 4x$ в. $|x + 2| \geq x + 3$

г. $|2 - x| \leq 4x - 3$ д. $|7 + 5x| = 5x + 7$ е. $|4 - 5x| = 4 - 5x$

ё. $|x + 1| < 3x - 2|x + 1|$ ж. $|x + 2| - 5x \geq 4|x + 2|$

з. $|5x - 6| + 2x \geq 7$ и. $|2x + 5| - 5x \leq 11$

Дасгал 11. Тэнцэтгэл биш бод.

а. $|4x - 5| > |3x + 7|$ б. $|2x + 7| \leq |x - 8|$ в. $5|x - 7| < |6x + 5|$

г. $|7x + 1| \geq 2|2x + 3|$ д. $|4x - 3| \geq |x + 6|$ е. $|1 - 3x| \leq |1 - x|$

Дасгал 12. Тэнцэтгэл бишийг бод.

а. $|x^2 - 4x| < 5$ б. $|x^2 - x - 6| > 4$ в. $|x^2 - 2x - 3| < 3x - 3$

г. $x^2 - 7x + 12 < |x - 4|$ д. $x^2 > |5x + 8|$ е. $7 - x^2 < 3|x - 1|$

е. $x^2 - 5x + 9 < |x - 6|$ ё. $|x^2 + 3x| \geq 2 - x^2$ ж. $|x^2 - 6x + 8| \geq 5x - x^2$

Дасгал 13. Тэнцэтгэл биш бод.

а. $|3x^2 - 7x - 6| < |x^2 + x|$ б. $|x - 1 - x^2| \leq |x^2 - 3x + 4|$

в. $|x^2 + x - 2| < \left|1 + \frac{x}{5}\right|$ г. $|x - 6| > |x^2 - 5x + 9|$

д. $|x^2 - 2x - 8| < |2x|$ е. $|x^2 - x - 12| < |x^2 - 1|$

Дасгал 14. Тэнцэтгэл биш бод.

а. $|x^2 - 5x + 6| > 5$ б. $|x^2 - 5x + 6| > 5$ в. $|x^2 - 5x + 6| < 7$

г. $|x^2 - 5x + 6| > |x|$ д. $|x^2 - 2x - 4| > |x - 1|$ е. $|x^2 - 2x - 4| > |x - 1|$

Дасгал 15. Тэнцэтгэл биш бод.

а. $|x| < 3$ б. $|x + 2| > -2$ в. $|x - 7| \leq 0$ г) $|x + 1| > 3$

д. $|2 - x| < 5$ е. $|3 + x| \geq 3$ ё. $|x + 2| < 2$ ж. $|2x + 5| \geq 7$

з. $||2x + 1| - 5| > 2$ и. $|2x - |x + 3|| \leq 3$ й. $0 < |x - 4| \leq 1$

к. $1 < |x - 3| < 5$ л. $3 \leq |4 - x| < 7$ м. $2 \leq |5x - 1| \leq 4$

Дасгал 16. Тэнцэтгэл биш бод.

а. $|3x - 4| > x + 1$ б. $|x + 1| \leq 2x$ в. $|x - 3| < 2 - 4x$

г. $4|2 - x| > 1 - x$ д. $2|x + 1| > x + 4$ е. $|2x - 1| \geq x - 1$

Дасгал 17. Тэнцэтгэл биш бод.

а. $|5x + 3| < |2x - 1|$ б. $|2x + 3| \leq |x|$ в) $x^2 + |x - 1| \leq 5$

г. $|x + 2| + 3 - x^2 \leq 0$ д. $|x^2 - 3| + x^2 + x < 7$ е) $|x^2 - 5x| < 6$

ё. $|x - 6| \leq |x^2 - 5x + 9|$ ж. $x^2 + |6x - 24| \leq 16$ и) $x^2 - 5|x| + 6 < 0$

й. $x^2 - |x| - 2 \geq 0$ к. $(|x| - 8)(|x| - 2) > 0$ л) $(|x| - 3)(|x| + 7) < 0$

Дасгал 18. Тэнцэтгэл биш бод.

а. $|x| + |x + 3| < 5$ б. $|x - 1| + |2 - x| > 3$

в. $|x^2 + 2x - 3| \leq |6x - 6|$ г. $|x - 2| \leq |2x^2 - 9x + 9|$

д. $|x - 2| \leq 2x^2 - 9x + 9$ е. $2|x - 4| + |3x + 5| \geq 16$

ё. $|x - 2| + |x + 2| \leq 4$ и. $|x^2 - 3x + 1| < x - 2$

й. $|x^2 + 4x - 5| \leq x^2 + 4x - 5$ к. $|x^2 - 1| + |x^2 - 9| < 8$

л. $||x| - 1| > |x|$ м. $|x^2 - |x^2 + x|| > 11$

Дасгал 19. Тэнцэтгэл биш бод.

а. $|x - 2|(x - 1) > 0$ б. $|x^2 - 1|(x - 9) < 0$ в. $x^2 + \sqrt{x^2} < 6$

г. $|2x^2 - 9x + 15| \geq 20$ д. $|x^2 + 2x - 4| > 4$

е. $|x^2 - 4x + 3| \leq |x^2 + x - 3|$ ё. $|x^2 - 9| \geq |x^2 - 2x + 3|$

ж. $|2x^2 - x - 10| > |x^2 - 8x - 22|$ з. $|x^2 - 3x - 3| > |x^2 + 7x - 13|$

БҮЛЭГ 2. ОЛОН ГИШҮҮНТ

Энэ бүлэг сэдвийг судалснаар дараах мэдлэг, чадварыг эзэмшинэ.

- Дөрөв хүртэл зэргийн олон гишүүнтийг нэг болон хоёр зэргийн олон гишүүнтэд хуваах үйлдлийг ойлгох, ногдвор ба үлдэгдлийг олох /үлдэгдэл 0 байж болно/
- Безугийн теорем ашиглан олон гишүүнтийг үржигдэхүүн болгон задлах, 3 ба 4 зэргийн тэгшитгэл бодох, үл мэдэгдэх коэффициентийг олох
- $Q(x)$ нь $(ax + b)(cx + d)$, $(ax + b)^2$ хэлбэрийн олон гишүүнт ба $P(x)$ олон гишүүнтийн зэрэг $Q(x)$ -ийн зэргээс хэтрэхгүй байх тохиолдолд $\frac{P(x)}{Q(x)}$ рационал функцийг тодорхой бус коэффициентийн аргаар хялбар рационал функцүүдийн нийлбэрт задлах
- $Q(x)$ нь $(ax + b)(cx + d)(ex + f)$, $(ax + b)(cx + d)^2$, $(ax + b)(cx^2 + d)$ хэлбэрийн олон гишүүнт ба $P(x)$ олон гишүүнтийн зэрэг $Q(x)$ -ийн зэргээс хэтрэхгүй байх тохиолдолд $\frac{P(x)}{Q(x)}$ рационал функцийг тодорхой бус коэффициентийн аргаар хялбар рационал функцүүдийн нийлбэрт задлах
- Рационал функцийг тодорхой бус коэффициентийн аргаар олон гишүүнт болон хялбар рационал функцүүдийн нийлбэрт задлах

2.1. Олон гишүүнт, олон гишүүнтийн нэмэх, хасах, үржүүлэх үйлдэл

Олон гишүүнтийн тухай судлахын өмнө эхлээд нэг гишүүнтийн тухай сэргээн саная.

$2, -5x, 3x^2, 4x^3y, 8x^4y^3z$ гэх мэт зөвхөн үржүүлэх болон зэрэгт дэвшүүлэх үйлдлээр холбогдсон илэрхийллүүдийг **нэг гишүүнт** гэх ба түүний хувьсагчуудын илтгэгчүүдийн нийлбэрийг түүний зэрэг гэнэ. Тухайлбал 2-ын зэрэг 0, $-5x$ -ийн зэрэг 1, $3x^3y$ -ийн зэрэг 4, $7x^4y^3z$ -ийн зэрэг 8 байна. Зөвхөн коэффициентээрээ ялгаатай байж болох $3x^2y, -2x^2y, x^2y$ илэрхийллүүдийг **төсөөтэй гишүүд** гэж нэрлэдэг. Төсөөтэй гишүүд дээр нэмэх, хасах үйлдэл хийхийг **төсөөтэй гишүүдийг эмхэтгэх** гэнэ.

Тодорхойлолт. $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ хэлбэрийн функцийг олон гишүүнт гэнэ. Энд n нь сөрөг биш бүхэл тоо, x нь хувьсагч, a_1, a_2, \dots, a_n нь бодит тоо байна. $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ тоог **коэффициент** (a_i нь x^i -ийн коэффициент) гэнэ. $a_n \neq 0$ бол $a_n x^n$ -ийг **ахлах гишүүн** гэх ба a_n -ийг **ахлах гишүүний коэффициент**, n -ийг **олон гишүүнтийн зэрэг** гэдэг. $P(x)$ -ийг **n -зэргийн олон гишүүнт** гэнэ.

Олон гишүүнтийн ерөнхий хэлбэр	Жишээ	Ахлах гишүүн	Сул гишүүн	Олон гишүүнтийн зэрэг	Нэршил
$P(x) = ax + b$	$2x - 1$	$2x$	-1	1	Шугаман олон гишүүнт
$P(x) = ax^2 + bx + c$	$3x^2 - 4x + 5$	$3x^2$	5	2	Квадрат зэргийн олон гишүүнт
$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$	$x^3 - 2x^2 + 3x - 4$	x^3	-4	3	Куб зэргийн олон гишүүнт
$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$	$-2x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 5x$	$-2x^4$	0	4	4 зэргийн олон гишүүнт

Олон гишүүнтийн нэмэх, хасах үйлдэл.

Жишээ 1. $(3x^2 - 5x + 7) + (x^2 + 2x - 1)$ үйлдлийг гүйцэтгэ.

Бодолт. Хаалт задлан бичиж төсөөтэй гишүүдийг эмхэтгэвэл

$$3x^2 - 5x + 7 + x^2 + 2x - 1 = 4x^2 - 3x + 6 \text{ болно.}$$

— = ≡ — = ≡

Жишээ 2. $(3x^3 + 5x^2 + 3x - 6) - (3x^2 - x + 5)$ үйлдлийг гүйцэтгэ.

Бодолт. Хаалт задлан бичиж төсөөтэй гишүүдийг эмхэтгэвэл

$$3x^3 + 5x^2 + 3x - 6 - 3x^2 + x - 5 = 3x^3 + 2x^2 + 4x - 11 \text{ болно.}$$

— = ≡ — = ≡

Дасгал 1. Үйлдлийг гүйцэтгэ.

а) $(4y + 8) + (7y - 6)$ б) $(-8x - 9) + (-5x + 6)$

в) $(-a + 11) - (4a - 8)$ г) $(5z + 1) - (3z - 7)$

д) $(3x^2 - 4x + 5) + (-2x^2 - 2x - 6)$ е) $(2x^2 - 12x + 4) - (-x^2 - 6x + 14)$

в) $(5x^2 - 2x - 51) + (-6x^2 + 8x - 8)$

г) $(x^3 + 3x^2 - 10x - 1) + (2 - 15x + 11x^2 - 3x^3)$

д) $(x^3 - 2x^2 - 3x + 6) - (x^3 - 11x^2 + x - 11)$

Олон гишүүнтийн үржүүлэх үйлдэл.

Жишээ 3. $(2x) \cdot (3x^2)$ үйлдлийг гүйцэтгэж зэргийг тодорхойл.

Бодолт. $(2x) \cdot (3x^2) = 2 \cdot 3 \cdot x \cdot x^2 = 6x^3$ нь куб зэргийн нэг гишүүнт.

Жишээ 4. $(-4xy^2) \cdot (5x^2yz)$ үйлдлийг гүйцэтгэж зэргийг тодорхойл.

Бодолт. $(-4xy^2) \cdot (5x^2yz) = -4 \cdot 5 \cdot x \cdot x^2 \cdot y \cdot y^2 \cdot z = -20x^3y^3z$ болох ба энэ нь $3 + 3 + 1 = 7$ тул 7 зэргийн нэг гишүүнт болно.

Дасгал 2. Үйлдлийг гүйцэтгэж, нэг гишүүнтийн зэргийг тодорхойл.

а. $z \cdot z \cdot z^2$ б. $x \cdot x \cdot x^3 \cdot 5 \cdot y^2 \cdot y^5$ в. $2 \cdot x \cdot x^3 \cdot 3 \cdot y \cdot y^2 \cdot z \cdot z^4$

г. $7a \cdot 6ab \cdot 3b^2 \cdot a^2$ д. $(2a^2)^3 \cdot 3a \cdot a^4$ е. $5(pq)^2 \cdot p^3 \cdot (-2q)^3$

ё. $3a^m \cdot 2a^{3m+1}$ ж. $z^{2x+4} \cdot (zy^{3x})^2 \cdot y^{2x-5}$

з. $(3x^n y^m)^2 \cdot (-2x^n \cdot y^m)^3$ и. $(-6a^3 b^2 c)^2 \cdot (-3ab^2 c^3)$

й. $(-2\frac{2}{3}x^3 y^4 z) \cdot (-1\frac{4}{5}x y^3 z^2)$

Жишээ 5. $2x \cdot (3x^2 + 5x + 4)$ үржүүлэх үйлдлийг гүйцэтгэ.

Бодолт. Нэг гишүүнтээр олон гишүүнтийг үржүүлсэн тохиолдолд уг нэг гишүүнтээр олон гишүүнтийн гишүүн тус бүрийг үржүүлнэ. Өөрөөр хэлбэл

$$2x(3x^2 + 2x - 4) = 2x \cdot 3x^2 + 2x \cdot 5x + 2x \cdot (-4) = 6x^3 + 10x^2 - 8x$$

болно.

Жишээ 6. $(5x - 6) \cdot (3x^2 + 7)$ үржүүлэх үйлдлийг гүйцэтгэ.

Бодолт. Олон гишүүнтээр олон гишүүнтийг үржүүлсэн тохиолдолд уг олон гишүүнтийн гишүүн бүрээр олон гишүүнтийн гишүүн тус бүрийг үржүүлнэ. Өөрөөр хэлбэл

$$(5x - 6) \cdot (3x^2 + 7) = 5x \cdot 3x^2 + 5x \cdot 7 - 6 \cdot 3x^2 - 6 \cdot 7 = 15x^3 - 18x^2 + 35x - 42 \text{ болно.}$$

Дасгал 3. Үйлдлийг гүйцэтгэ.

- а. $x^2(2x + 1)$ б. $-3x(-2x^2 + 3x - 1)$
в. $(2x - 1)(3x^2 - 4)$ г. $(-x - 1)(2x^2 - x + 1)$
д. $(3x + 1)(x + 4)(x - 5)$ е. $(2x - 3)(4 - x)(4x - 1)$
ё. $(x^2 + 1)(x^2 - 2)(x - 3)$ ж. $(2y^2 - 1)(4y^2 + 3)(y - 2)$

Дасгал 4.

Дараах олон гишүүнтүүдийн зэрэг, ахлах гишүүнийг тодорхойлж, гишүүдийн тоог бичнэ үү

- а. $P(x) = 3x^2 - 4x + 5$ б. $P(x) = 7x^7 + 5x^5 + 3x^3 + x^2$
в. $Q(y) = -y^8 + y^5 - 4y^2$ г. $Q(y) = -5y^{10} + 8y^9 - 2y^2 - y + 1$

Дасгал 5. $P(x) = 3x^2 - 4x + 5$, $Q(x) = -x^3 - 4x^2 + 2$ бол

$$P(x) + Q(x), \quad P(x) - Q(x), \quad P(x)Q(x)$$

олон гишүүнтүүдийн зэрэг, ахлах гишүүнийг тодорхойлж, гишүүдийн тоог бичнэ үү.

Дасгал 6.

а. $P(x) = 3x^4 - 5x^3 - 4x^2$, $Q(x) = 2x^4 + 5x^3 - 3x$ бол

$P(x) + Q(x)$, $P(x) - Q(x)$, $P(x) \cdot Q(x)$ олон гишүүнтүүдийг олж, тус бүрийн зэргийг бич.

б. $M(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2$, $N(x) = x^2 - 3x + 1$ бол

$$M(x) + N(x), \quad M(x) - N(x), \quad M(x) \cdot N(x)$$

олон гишүүнтүүдийг олж, тус бүрийн зэргийг бич.

- в. $P(x) = x^2 + 3x - 1$ бол $P(5)$, $P(-4)$, $P(3)$, $P(y + 1)$ утгуудыг ол.
г. $Q(x) = x^3 - 5x - 2$ бол $P(-2)$, $P(0)$, $P(1)$, $P(z - 2)$ утгуудыг ол.
д. $P(x + 1) = 2x^2 + 3x - 1$ бол $P(x)$, $P(3)$, $P(0)$ утгуудыг ол.
е. $P(x - 1) = 3x^3 + 6x^2 - 6x - 1$ бол $P(x)$, $P(-1)$, $P(1)$ утгуудыг ол.

2.2. Адилтгал тэнцүү илэрхийлэл

Тодорхойлолт. Хэрэв хувьсагчийн утга бүрд хоёр илэрхийллийн утга тэнцүү байвал тэдгээрийг **адилтгал тэнцүү** илэрхийлэл гэнэ. Хоёр илэрхийллийг адилтгал тэнцүү болохыг (\equiv) гэж тэмдэглэнэ.

Тухайлбал: Бодит a, b, x бүрийн хувьд

$$(a + b)^2 \text{ ба } a^2 + 2ab + b^2$$

$$a^3 - b^3 \text{ ба } (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$(4x^2 + 2x + 1)(2x - 1) \text{ ба } 8x^3 - 1$$

$$(2x + 3) + (x - 2) \text{ ба } 3x + 1$$

илэрхийллүүд нь адилтгал тэнцүү байна.

Жишээ 1. $ax + b \equiv cx + d$ илэрхийллүүд адилтгал тэнцүү бол $a = c, b = d$ болохыг батал.

Баталгаа. x хувьсагчийн утга бүрд тэнцүү утгатай байх тул $x = 0$ үед

$$a \cdot 0 + b = c \cdot 0 + d \text{ байна. Эндээс } b = d \text{ байна. } x = 1 \text{ үед } a \cdot 1 + b = c \cdot 1 + d \text{ ба } b = d$$

тул $a = c$ болж батлагдав.

Жишээ 2.

$ax^2 + bx + c \equiv dx^2 + ex + f$ илэрхийллүүд адилтгал тэнцүү бол $a = d, b = e, c = f$ болохыг батал.

Баталгаа. x хувьсагчийн утга бүрд тэнцүү утгатай байх тул $x = 0$ үед

$a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = d \cdot 0 + e \cdot 0 + f$ гэдгээс $c = f$ болно. Мөн $x = 1, x = -1$ утгуудын хувьд бичвэл

$$a + b + c = d + e + f$$

$$a - b + c = d - e + f$$

ба эдгээрийг нэмбэл $2a + 2c = 2d + 2f$ буюу $c = f$ гэдгээс $a = d$ гэж гарна. Эндээс $b = e$

Ерөнхий тохиолдолд

$$ax^n + bx^{n-1} + \dots + kx + m \equiv Ax^n + Bx^{n-1} + \dots + Kx + M$$

илэрхийллүүд адилтгал тэнцүү бол

$$a = A, b = B, c = C, \dots, k = K, m = M \text{ байна.}$$

гэдэг нь мөрдөнө.

Жишээ 3. $(Ax + B)(x - 2) \equiv -2x^2 + 10x - 12$ илэрхийллүүд адилтгал тэнцүү бол A, B бодит тоог ол.

Бодолт: Үржүүлэх үйлдлийг гүйцэтгэвэл $Ax^2 + (B - 2A)x - 2B$ болох тул адилтгал илэрхийллийн тодорхойлолт ёсоор

$$\begin{cases} A = -2 \\ B - 2A = 10 \\ -2B = -12 \end{cases}$$

нөхцөл биелнэ. Энэ системийг бодвол $A = -2, B = 6$ гэж олдоно.

Жишээ 4. $(Ax + B)(x^2 + 4x + 3) + C \equiv 2x^3 + 3x^2 - 14x - 5$ бол A, B, C бодит тоог ол.

$$\text{Бодолт. } (Ax + B)(x^2 + 4x + 3) + C = Ax^3 + 4Ax^2 + 3Ax + Bx^2 + 4Bx + 3B + C =$$

$$Ax^3 + (4A + B)x^2 + (3A + 4B)x + (3B + C) =$$

гэдгээс бид $\begin{cases} A=2 \\ 4A+B=3 \\ 3A+4B=-14 \\ 3B+C=-5 \end{cases}$ систем тэгшитгэл зохиох юм.

Үүнийг бодвол $A = 2, B = -5, C = 10$ гэж олдоно.

Дасгал 7. Илэрхийллүүд адилтгал тэнцүү бол A, B коэффициентийг ол.

- а. $(Ax + B)(x - 3) \equiv 4x^2 - 11x - 3$ б. $(Ax + B)(x + 5) \equiv 2x^2 + 7x - 15$
в. $(Ax + B)(3x - 2) \equiv 6x^2 - x - 2$ г. $(Ax + B)(2x + 5) \equiv 6x^2 + 11x - 10$
д. $(Ax + B)(x^2 - 1) \equiv x^3 + 2x^2 - x - 2$ е. $(Ax + B)(x^2 + 4) \equiv 2x^3 - 3x^2 + 8x - 12$
ё. $(Ax + B)(2x^2 - 3x + 4) \equiv 4x^3 - x + 12$ ж. $(Ax + B)(3x^2 - 2x - 1) \equiv 6x^3 - 7x^2 + 1$

Дасгал 8. Илэрхийллүүд адилтгал тэнцүү бол A, B, R коэффициентийг ол.

- а. $15x^2 - 14x - 8 \equiv (5x + 2)(Ax + B) + R$
б. $6x^2 + x - 5 \equiv (2x + 1)(Ax + B) + R$
в. $12x^2 - 5x + 2 \equiv (3x - 2)(Ax + B) + R$
г. $21x^2 - 11x + 6 \equiv (3x - 2)(Ax + B) + R$

Дасгал 9. Илэрхийллүүд адилтгал тэнцүү бол A, B, C, D, R коэффициентийг ол.

- а. $x^3 - x^2 - x + 12 \equiv (x + 2)(Ax^2 + Bx + C) + R$
б. $x^3 - 5x^2 + 10x + 10 \equiv (x - 3)(Ax^2 + Bx + C) + R$
в. $2x^3 + x^2 - 3x + 4 \equiv (2x - 1)(Ax^2 + Bx + C) + R$
г. $12x^3 + 11x^2 - 7x + 5 \equiv (3x + 2)(Ax^2 + Bx + C) + R$
д. $4x^3 + 4x^2 - 37x + 5 \equiv (2x - 5)(Ax^2 + Bx + C) + R$
е. $9x^3 + 12x^2 - 15x - 10 \equiv (3x + 4)(Ax^2 + Bx + C) + R$

2.3. Олон гишүүнтийн язгуур

Тодорхойлолт. $P(x)$ олон гишүүнтийн хувьд $P(t) = 0$ бол t тоог

$P(x)$ олон гишүүнтийн язгуур гэнэ.

Жишээ 1. $P(x) = x^2 - 5x + 6$ олон гишүүнтийн язгуурыг ол.

Бодолт. $x^2 - 5x + 6 = 0$ квадрат тэгшитгэлийн дискриминант нь $D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$ байна. Иймд $x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm 1}{2 \cdot 1}$ болох ба $x_1 = 3, x_2 = 2$ тоонууд нь $P(x)$ олон гишүүнтийн язгуур болно.

Тодорхойлолт. $P(x) = ax^2 + bx + c$ олон гишүүнтийн язгуур x_1, x_2 бол

$$ax^2 + bx + c \equiv a(x - x_1)(x - x_2)$$

илэрхийллүүд адилтгал тэнцүү байна.

Жишээ 2. $P(x) = 3x^2 + 2x - 33$ олон гишүүнтийг үржигдэхүүн болгон задал.

Бодолт. $3x^2 + 2x - 33 = 0$ бодвол $D = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-33) = 400$ ба

$$x_1 = \frac{-2 + 20}{6} = 18, \quad x_2 = \frac{-2 - 20}{6} = -\frac{11}{3}$$

тул $3x^2 + 2x - 33 = 3(x - 18)\left(x + \frac{11}{3}\right)$ байна.

Тодорхойлолт.

$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ олон гишүүнтийн язгуур x_1, x_2, x_3 бол

$$ax^3 + bx^2 + cx + d \equiv a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

илэрхийллүүд адилтгал тэнцүү байна..

Жишээ 3. $P(x) = 6x^3 - 17x^2 - 4x + 3$ олон гишүүнтийг үржигдэхүүн болгон задал.

Бодолт. $6x^3 - 17x^2 - 4x + 3 = 0$ тэгшитгэлийг бодъё.

$$6x^3 - 17x^2 - 4x + 3 = 6x^3 - 18x^2 + x^2 - 3x - x + 3 = 6x^2(x - 3) + x(x - 3) - (x - 3)$$

$$(x - 3)(6x^2 + x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 3 = 0 \\ 6x^2 + x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ 6x^2 + x - 1 = 0 \end{cases}$$

$6x^2 + x - 1 = 0$ ийг бодвол $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{3}$ шийдүүд олдоно. Иймд $P(x)$ олон гишүүнт

$P(x) = 6(x - 3)(x - 1/3)(x + 1/2)$ буюу $P(x) = (x - 3)(3x - 1)(2x + 1)$ гэж үржвэр болно.

Дасгал 10. Олон гишүүнтийн язгуурыг ол.

а. $P(x) = 3x - 21$ б. $P(x) = 5x + 25$ в. $P(x) = 4(x - 2) + 1$

г. $P(x) = 3(x - 5) - 24$ д. $P(x) = x^2 + 3x - 10$ е. $P(y) = y^2 + y - 20$

ё. $P(x) = 5x^2 - 22x - 24$ ж. $P(x) = x^2 - 3x - 70$

и. $P(x) = x^3 - 12x^2 + 20x$ й. $P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 33x$

Дасгал 11. Олон гишүүнтийн язгуурыг ол.

а. $P(x) = x^3 - 6x^2 + 15x - 14$ б. $P(x) = 3x^3 + x^2 - 8x + 4$

в. $P(x) = 8x^3 - 20x + 9$ д. $P(x) = 9x^3 - 13x - 6$

е. $P(z) = z^4 + z^2 + 6z - 8$ ё. $P(a) = a^4 + 2a^3 - a - 2$

Дасгал 12. Олон гишүүнтийн язгуурыг олж, үржигдэхүүн болгон задал.

а. $2x^2 - 5x + 2$ б. $4x^2 - 12x + 9$ в. $6x^2 + 5x + 1$ г. $3x^2 - 7x - 1$

д. $x^2 - 8x - 9$ е. $x^2 + 6x - 40$ ё. $x^2 + 18x + 81$ ж. $x^2 - 56x + 64$

2.4. Олон гишүүнтийн хуваах үйлдэл.

Тодорхойлолт. $P(x)$ олон гишүүнтийг тогтмол биш олон гишүүнт $Q(x)$ -д хуваахад ноогдвор нь $K(x)$, үлдэгдэл нь $R(x)$ гардаг бол

$$P(x) = Q(x) \cdot K(x) + R(x)$$

адилтгал биелнэ. Энд үлдэгдэл олон гишүүнтийн зэрэг нь хуваагч олон гишүүнтийн зэргээс бага байна. Ногдвор олон гишүүнт $K(x)$ -ийн зэрэг нь $P(x)$ (хуваагдагч олон гишүүнт)-ийн зэргээс $Q(x)$ (хуваагч олон гишүүнт)-ийн зэргийг хассантай тэнцүү.

Жишээлбэл:

$$2x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 5x + 3 = (x^2 + 3x - 1) \cdot (2x^2 - 3x + 13) + (-47x + 16)$$



Жишээ 1. $y^3 - 2y^2 - y + 5$ олон гишүүнтийг $y^2 - 3y + 2$ олон гишүүнтэд хуваахад гарах ногдвор ба үлдэгдлийг ол.

Бодолт. Ногдвор ба хуваагч олон гишүүнтүүдийн зэргийн нийлбэр хуваагдагч олон гишүүнтийн зэрэгтэй тэнцүү байх тул ногдвор олон гишүүнтийг $Ay + B$ хэлбэртэй гэж үзэж болно. Өөрөөр хэлбэл

$$y^3 - 2y^2 - y + 5 = (y^2 - 3y + 2)(Ay + B) + R \text{ гэж бичиж болно. (Энд үлдэгдэл } R\text{-ийн зэрэг 1 эсвэл 0 байна.)}$$

Эндээс тэнцэтгэлийн баруун талыг хаалт задлан гишүүнчлэн үржүүлбэл

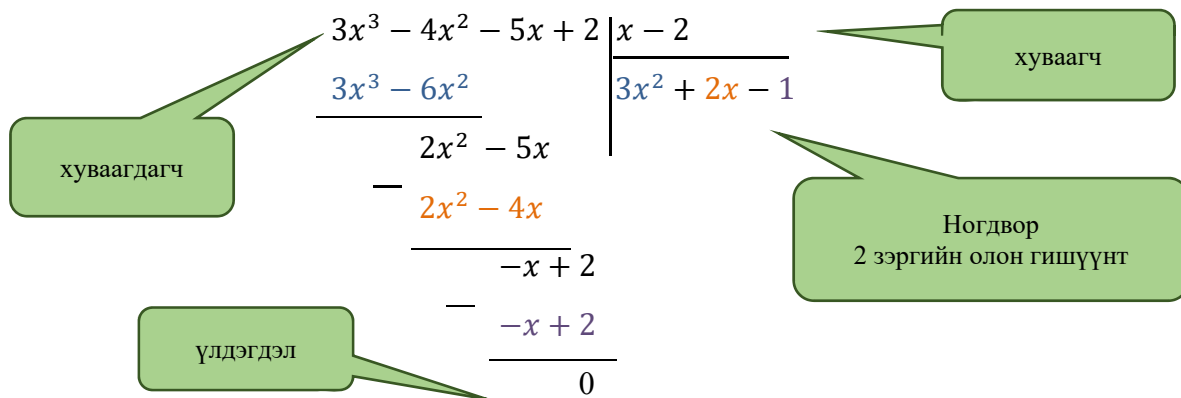
$$Ay^3 + (-3A + B)y^2 + (2A - 3B)y + 2B + R \text{ болно. Энэ олон гишүүнтийг хуваагдагч олон гишүүнттэй адилтгал тэнцүү гэж үзэж болох учир}$$

$$A = 1 \text{ байна. Мөн } -2 = -3A + B \text{ гэдгээс } B = 1 \text{ гэж олдоно. } 2A - 3B = -1 \text{ тул } R = 5 \text{ байна. Иймд } Ay + B = y + 1 \text{ нь ногдвор олон гишүүнт юм.}$$

Дээрх жишээн дээр авч үзсэн адилтгал тэнцүү чанарыг ашигласан хуваах үйлдэл нь бодолтыг төвөгтэй болгож байна. Одоо бид олон гишүүнтийг олон гишүүнтэд хуваах арай хялбар арга буюу “**өнцөглөн хуваах**” аргатай танилцъя.

Энэ арга нь тооны хуваах үйлдэлтэй төстэй юм.

Жишээ 2. $3x^3 - 4x^2 - 5x + 2$ олон гишүүнтийг $x - 2$ олон гишүүнтэд хуваа.



Жишээ 3. $2x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 5x + 3$ олон гишүүнтийг $x^2 + 3x - 1$ олон гишүүнтэд хуваа.

$$\begin{array}{r}
 2x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 5x + 3 \quad | \quad x^2 + 3x - 1 \\
 \underline{- 2x^4 + 6x^3 - 2x^2} \quad | \quad 2x^2 - \\
 -3x^3 + 4x^2 - 5x \quad | \\
 \underline{- -3x^3 - 9x^2 + 3x} \quad | \\
 13x^2 - 8x + 3 \quad | \\
 \underline{- 13x^2 + 39x - 13} \quad | \\
 -47x + 16 \quad |
 \end{array}$$

$3x + 13$

Үлдэгдэл
1 зэргийн олон
гишүүнт

Ногдвор
2 зэргийн олон
гишүүнт

Ногдвор олон гишүүнт нь $2x^2 - 3x + 13$, үлдэгдэл олон гишүүнт нь $-47x + 16$ байна.

Дасгал 13. $P(x)$ олон гишүүнтийг $Q(x)$ олон гишүүнтэд хуваахад гарах ногдвор ба үлдэгдэл олон гишүүнтийг ол.

- а. $P(x) = 4x^3 - 6x^2 + 4x - 9, \quad Q(x) = x - 2$
- б. $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 1, \quad Q(x) = x + 1$
- в. $P(x) = x^4 - x^3 - 6x^2 - 2, \quad Q(x) = x + 2$
- г. $P(x) = x^3 - 6x^2 + 5x, \quad Q(x) = x - 1$
- д. $P(x) = 3x^3 - 2x^2 - 7x + 6, \quad Q(x) = x + 1$
- е. $P(x) = 2x^3 - 5x - 7, \quad Q(x) = x - 2$
- ё. $P(x) = 2x^3 + 7x^2 - 6x - 8, \quad Q(x) = x + 4$
- ж. $P(x) = 5x^3 - 3x^2 - 6, \quad Q(x) = x - 1$
- и. $P(x) = 3x^3 - 5x^2 + 4x + 2, \quad Q(x) = 3x + 1$
- й. $P(x) = x^3 + 5, \quad Q(x) = x + 2$

Дасгал 14. $P(x)$ олон гишүүнтийг $Q(x)$ олон гишүүнтэд хуваахад гарах ногдвор ба үлдэгдэл олон гишүүнтийг ол.

- а. $P(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - x + 6, \quad Q(x) = x + 3$
- б. $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 5x - 10, \quad Q(x) = x - 2$
- в. $P(x) = 7x^4 - 10x^3 + 3x^2 + 3x - 3, \quad Q(x) = x - 1$
- г. $P(x) = 2x^4 + 8x^3 - 5x^2 - 4x + 2, \quad Q(x) = x^2 + 4x - 2$
- д. $P(x) = 3x^4 - x^3 + 8x^2 + 5x + 3, \quad Q(x) = x^2 - x + 3$
- е. $P(x) = 3x^4 + 9x^3 - 5x^2 - 6x + 2, \quad Q(x) = 3x^2 - 2$
- ё. $P(x) = x^3 - 2x^2 - 4, \quad Q(x) = x - 2$

ж. $P(x) = x^3 - 4x^2 + 9, \quad Q(x) = x - 3$

и. $P(x) = x^4 - 13x - 42, \quad Q(x) = x^2 - x - 6$

Дасгал 15.

а. $n^2 + 5n + 6$ тоо $n + 1$ тоонд хуваагддаг байх $n \in N$ тоог ол.

б. $3n^2 + 4n + 15$ тоо $n + 2$ тоонд хуваагддаг байх $n \in N$ тоог ол.

в. $3n^3 + 7n^2 + 3n + 10$ тоо $n + 2$ тоонд хуваагддаг байх $n \in N$ тоог ол.

г. $10n^2 - 55$ тоо $2n^2 + 3$ тоонд хуваагддаг байх $n \in N$ тоог ол.

2.5. Безугийн теорем

Теорем 1. $P(x)$ олон гишүүнтийг $x - t$ хэлбэрийн олон гишүүнтэд хуваахад гарах үлдэгдэл нь $P(t)$ -тай тэнцүү байна. Үүнийг **Безугийн теорем гэдэг.**

Баталгаа. $P(x)$ олон гишүүнтийг $x - t$ шугаман үржигдэхүүнд хуваахад $q(x)$ ногдож R үлдэгдэл өгдөг байг.

Тэгвэл $P(x) = (x - t)q(x) + R$ байх ба $x = t$ үед адилтгал биелэх тул $P(t) = (t - t)q(t) + R = 0 \cdot q(t) + R$ болох ба $P(t) = R$ байна.

Жишээ 1. $P(x) = x^3 - 3x + 4$ олон гишүүнтийг $x + 3$ олон гишүүнтэд хуваахад гарах үлдэгдлийг ол.

$x + 3 = 0, x = -3$ тул $P(-3) = (-3)^3 - 3(-3) + 4 = -14$ байна.

Жишээ 2. $P(x) = x^3 - 3x^2 + ax + b$ олон гишүүнтийг $x - 1$ шугаман үржигдэхүүнд хуваахад -4 , $x - 2$ шугаман үржигдэхүүнд хуваахад -4 үлддэг бол $x - 3$ шугаман үржигдэхүүнд хуваахад гарах үлдэгдлийг ол.

Бодолт. Безугийн теоремоор $x - 1 = 0, x = 1$ гарах тул $P(1) = -4$ байна.

Иймд $P(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + a \cdot 1 + b$ гэдгээс $a + b = -2$ гэж гарна. Мөн $x - 2 = 0, x = 2$ гарах тул $P(2) = -4$ байна.

Иймд $P(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + a \cdot 2 + b$ гэдгээс $2a + b = 0$ гэж гарна.

Иймд $\begin{cases} a + b = -2 \\ 2a + b = 0 \end{cases}$ системээс $a = 2, b = -4$ гэж олдох ба $P(x)$ олон гишүүнт

$P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 4$ болно. $x - 3 = 0, x = 3$ тул $P(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 - 4 = 2$ байна.

Теорем 2. Безугийн өргөтгөсөн теорем

$P(x)$ олон гишүүнтийг $sx - t$ олон гишүүнтэд хуваахад гарах үлдэгдэл нь $P\left(\frac{t}{s}\right)$ -тай тэнцүү байна.

Баталгаа. $P(x)$ олон гишүүнтийг $sx - t$ шугаман үржигдэхүүнд хуваахад $q(x)$ ногдож R үлдэгдэл өгдөг байг.

Тэгвэл $P(x) = (sx - t)q(x) + R$ байх ба $x = \frac{t}{s}$ үед адилтгал биелэх тул

$$P\left(\frac{t}{s}\right) = \left(s \cdot \frac{t}{s} - t\right)q\left(\frac{t}{s}\right) + R = 0 \cdot q\left(\frac{t}{s}\right) + R \text{ болох ба } P\left(\frac{t}{s}\right) = R \text{ байна.}$$

Жишээ 3. $P(x) = x^3 - 3x + 4$ олон гишүүнтийг $2x + 3$ олон гишүүнтэд хуваахад гарах үлдэгдлийг ол.

Бодолт. $2x + 3 = 0$ буюу $x = -\frac{3}{2}$ тул $P\left(-\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}\right)^3 - 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 4 = -\frac{27}{8} + \frac{9}{2} + 4 = 5\frac{1}{8}$ байна.

Дасгал 16. $P(x)$ олон гишүүнтийг $Q(x)$ хоёр гишүүнтэд хуваахад гарах үлдэгдэл ба ногдворыг ол.

а. $P(x) = x^2 - 5x + 2$ $Q(x) = x - 3$

б. $P(x) = x^2 + 2x - 6$ $Q(x) = x + 1$

в. $P(x) = 2x^2 + 3x - 1$ $Q(x) = x - 2$

г. $P(x) = 2x^2 + 3x + 1$ $Q(x) = 2x - 1$

д. $P(x) = 6x^2 - x - 2$ $Q(x) = 3x + 1$

е. $P(x) = x^4 - x^3 + 3x - 2$ $Q(x) = 2x - 3$

Дасгал 17. Эхний олон гишүүнтийг дараагийн олон гишүүнтэд хуваахад гарах ногдвор ба үлдэгдлийг ол.

а. $x^3 - 5x^2 + 2x - 3$ $x - 1$

б. $x^3 + x^2 - 6x + 5$ $x + 2$

в. $2x^3 - 3x + 5$ $x - 3$

г. $4x^3 - 5x^2 + 3x - 7$ $x + 4$

д. $x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ $2x - 1$

е. $2x^3 + 5x^2 - 3x + 6$ $3x + 1$

ё. $x^4 - x^3 + 2x^2 - 7x - 2$ $x - 2$

ж. $3x^4 + x^2 - 7x + 6$ $x + 3$

Дасгал 18.

а. $x^3 + 2x^2 - px + 1$ олон гишүүнтийг $x - 1$ олон гишүүнтэд хуваахад 5 үлддэг бол p тоог ол.

б. $2x^3 + x^2 - 3x + q$ олон гишүүнтийг $x - 2$ олон гишүүнтэд хуваахад 12 үлддэг бол q тоог ол.

в. $x^3 + 2x^2 + px - 3$ олон гишүүнтийг $x + 1$ олон гишүүнтэд хуваахад гарах үлдэгдэл нь $x - 2$ хуваахад гарах үлдэгдэлтэй тэнцүү бол p тоог ол.

г. $x^3 + px^2 - x - 4$ олон гишүүнтийг $x - 1$ олон гишүүнтэд хуваахад гарах үлдэгдэл нь $x + 3$ хуваахад гарах үлдэгдэлтэй тэнцүү бол p тоог ол.

д. $3x^3 - 2x^2 + ax + b$ олон гишүүнтийг $x - 1$ ба $x + 1$ олон гишүүнтэд хуваахад харгалзан 3 ба -13 үлддэг. бол a ба b тоог ол.

е. $x^3 + 2x^2 - px + 1$ олон гишүүнтийг $x - 1$ олон гишүүнтэд хуваахад 5 үлддэг бол p тоог ол.

Мөрдлөгөө1.

а) Хэрэв $P(x)$ олон гишүүнт $x - t$ олон гишүүнтэд хуваагддаг бол $P(t) = 0$ байна.

б) Хэрэв $P(t) = 0$ бол $P(x)$ олон гишүүнт $x - t$ олон гишүүнтэд хуваагдана.

Баталгаа.

а) $P(t) = (x - t)q(x)$ ба $x = t$ бол $P(t) = (t - t)q(t)$ гэдгээс $P(t) = 0$ байна.

б) $P(x) = (x - t)q(x) + R$ байг. $P(t) = (t - t)q(t) + R = 0$ гэдгээс $R = 0$ болж $P(x)$ нь $x - t$ -д хуваагдана.

Мөрдлөгөө2.

а) Хэрэв $P(x)$ олон гишүүнт $sx - t$ олон гишүүнтэд хуваагддаг бол $P\left(\frac{t}{s}\right) = 0$ байна.

б) Хэрэв $P\left(\frac{t}{s}\right) = 0$ бол $P(x)$ олон гишүүнт $sx - t$ олон гишүүнтэд хуваагдана.

Баталгаа.

а) $P(t) = (sx - t)q(x)$ ба $x = \frac{t}{s}$ бол $P\left(\frac{t}{s}\right) = \left(s \cdot \frac{t}{s} - t\right)q\left(\frac{t}{s}\right)$ гэдгээс $P\left(\frac{t}{s}\right) = 0$ байна.

б) $P\left(\frac{t}{s}\right) = (sx - t)q(x) + R$ байг. $P\left(\frac{t}{s}\right) = \left(s \cdot \frac{t}{s} - t\right)q\left(\frac{t}{s}\right) + R = 0$ гэдгээс $R = 0$ болж $P(x)$ нь $(sx - t)$ -д хуваагдана.

Мөрдлөгөө3.

$P(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + tx + k$ бүхэл коэффициенттэй олон гишүүнт нь $(sx - t)$ гэсэн бүхэл коэффициенттэй шугаман олон гишүүнтэд хуваагддаг, ө.х $\frac{t}{s}$ нь $P(x)$ -ийн язгуур болдог үл хураагдах бутархай бол s ба t тоо нь харгалзан a ба k тооны хуваагч байна.

Энэ чанарыг ашиглан бүхэл коэффициенттэй олон гишүүнтийн рационал язгуурыг хайх хялбархан алгоритмыг гаргаж болно. Хэрэв $P(x)$ олон гишүүнтийн ахмад гишүүний коэффициент 1-тэй тэнцүү үед $P(x)$ олон гишүүнт рационал язгууртай бол тэр нь бүхэл тоо байна.

Баталгаа.

$P(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + tx + k$ олон гишүүнтийн язгуур $\frac{t}{s}$ байг. Тэгвэл

$a\left(\frac{t}{s}\right)^n + b\left(\frac{t}{s}\right)^{n-1} + \dots + m\frac{t}{s} + k = 0$ байна. Тэнцэтгэлийн хоёр талыг s^n -ээр үржүүлбэл

$at^n + bt^{n-1}s + \dots + mts^{n-1} + ks^n = 0$ болох ба at^n гишүүнээс бусад гишүүдийг тэнцэтгэлийн нөгөө талд гаргаж s -ийг хаалтын өмнө гаргавал

$at^n = s(-bt^{n-1} - \dots - mts^{n-2} + ks^{n-1})$ болно. Эндээс s нь t^n -ийг үл хуваах тул a тоо s тоонд хуваагдана. Үүнтэй адилаар $at^n + bt^{n-1}s + \dots + mts^{n-1} + ks^n = 0$

тэнцэтгэлийг $ks^n = t(-at^{n-1} - bt^{n-2}s - \dots - ms^{n-1})$ гэж бичвэл s^n нь t -д үл хуваагдах тул k тоо t тоонд хуваагдана.

Жишээ 4. $P(x) = 3x^3 + 4x^2 + 5x - 6$ олон гишүүнтийг үржигдэхүүн болгон задал.

Бодолт. Олон гишүүнтийн хуваагчийг $sx - t$ хэлбэртэй хайя. Тэгвэл s тоо 3-ын хуваагч тул $\pm 1, \pm 3$ байх боломжтой. Мөн t тоо нь -6 -ийн хуваагч тул $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ байх боломжтой юм. Гэвч $sx - t$ тоо $-sx + t$ тооноос хуваагчийн хувьд ялгаагүй. Мөн $3x \pm 3, 3x \pm 6$ нь хуваагч биш байна. Учир нь хоёуланд нь 3 гэсэн хуваагч байгаа ба $P(x)$ нь 3-д хуваагдахгүй байна.

Иймд $x \pm 1, x \pm 2, x \pm 3, x \pm 6, 3x \pm 1, 3x \pm 2$ боломжууд үлдэх ба $x = \pm 1, x = \pm 2, x = \pm 3, x = \pm 6, x = \pm \frac{1}{3}, x = \pm \frac{2}{3}$ утгуудад шалгаж үзье.

$x = \frac{2}{3}$ үед $P\left(\frac{2}{3}\right) = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 + 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 5 \cdot \frac{2}{3} - 6 = 0$ тул $P(x)$ нь $3x - 2$ -т хуваагдана гэсэн үг.

$P(x) = (3x - 2)(x^2 + 2x + 3)$ болох ба $\begin{cases} 3x - 2 = 0 \\ x^2 + 2x + 3 = 0 \end{cases}$ гэдгээс $x = \frac{2}{3}$ гэж олдоно.

Жишээ 5. $2x^3 - 7x^2 + 10x - 6 = 0$ тэгшитгэлийг бод.

Бодолт. Тэгшитгэлийг язгуурыг $\frac{t}{s}$ хэлбэртэй хайя. Тэгвэл

$s = \pm 1, \pm 2$ ба $t = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ боломжууд байна.

Тэгшитгэлийн язгуур сөрөг тоо байж болохгүй. Учир нь сөрөг тоо байвал илэрхийллийн утга сөрөг тоо болох тул тэгээс бага болно. Иймд эерэг язгууртай. Мөн сондгой бүхэл шийдгүй байна. Учир нь сондгой язгууртай бол 3 тэгш 1 сондгой тооны нийлбэр 0 гарахад хүрч зөрчил болно. Эндээс тэгшитгэлийн язгуур

$2, 6, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ байх боломжтой. Эдгээрийг шалгаж үзвэл $x = \frac{3}{2}$ гэсэн шийд олдоно. Өөрөөр хэлбэл

$2x^3 - 7x^2 + 10x - 6$ олон гишүүнт $2x - 3$ -д хуваагдах ба тэгшитгэлийг $(2x - 3)(2x^2 - 4x + 4) = 0$ гэж хувиргаж болно гэсэн үг. $2x^2 - 4x + 4 = 0$ тэгшитгэл шийдгүй тул $x = \frac{3}{2}$ гэсэн 1 шийд олдоно.

Дасгал 19. Олон гишүүнтийг үржигдэхүүн болгон задал.

- а. $x^3 - 5x^2 - 2x + 24$ б. $x^3 - 19x + 30$ в. $2x^3 - 3x^2 + 4x + 9$
г. $x^3 - 4x^2 - 4x - 5$ д. $2x^3 - 3x^2 + 5x - 14$ е. $3x^3 - x^2 + x + 2$
ё. $x^3 - x^2 - 4x - 6$ ж. $x^3 - 3x^2 + 2x + 6$ з. $x^3 - 2x^2 - 6x + 7$

Дасгал 20. Олон гишүүнтийг үржигдэхүүн болгон задал.

- а. $x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 4x + 2$ б. $z^4 + 6z^3 + 4z^2 - 15z - 6$
в. $x^4 - 2x^3 - 14x^2 + 15x + 56$ г. $2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2$

Дасгал 21. Тэгшитгэл бод.

- а. $(x + 1)^4 = 16$ б. $(2x + 1)^3 = 27$ в. $(x - 2)^6 = 64$ г) $(3x - 1)^5 = 32$
д. $x^{10} - 31x^5 - 32 = 0$ е. $x^8 - 15x^4 - 16 = 0$ ё. $x^4 - 12x^2 + 27 = 0$

ж. $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$ з. $x^8 - 82x^4 + 81 = 0$ и. $x^4 + 2x^2 - 15 = 0$

Дасгал 22. Тэгшитгэл бод.

а. $x^3 + 4x^2 + 6x + 3 = 0$ б. $x^3 - 6x^2 + 5x + 12 = 0$

в. $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = 0$ г. $6x^3 - 17x^2 - 26x - 8 = 0$

д. $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$ е. $2x^3 + 7x^2 + 2x - 3 = 0$

ё. $6x^3 - x^2 - 4x - 1 = 0$ ж. $x^3 - 19x + 30 = 0$

з. $6x^3 - 43x^2 + 71x - 30 = 0$ и. $x^3 + 9x^2 + 23x + 15 = 0$

й. $6x^3 + 10x^2 + 27x + 18 = 0$ к. $x^3 - 3x^2 - 9x - 5 = 0$

Дасгал 23. Тэгшитгэл бод.

а. $x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 18 = 0$ б. $48x^4 - 248x^3 + 27x^2 + 63x + 10 = 0$

в. $x^4 - x^3 - 13x - 15 = 0$ г. $x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 2x + 12 = 0$

д. $2x^4 + 3x^3 - x^2 + 3x + 2 = 0$ е. $x^4 + 2x^3 + x^2 - 4 = 0$

ё. $(x^2 + 6x - 5)^2 + x^3 - 5x = 0$ ж. $x^4 + 6x^3 - 24x - 16 = 0$

з. $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$

НЭМЭЛТ ДААЛГАВАР.

Дасгал 1. $P(x)$ олон гишүүнтийг $Q(x)$ олон гишүүнтэд хуваахад гарах үлдэгдлийг ол.

а. $P(x) = x^2 + 5x + 7$ $Q(x) = x + 3$

б. $P(x) = x^3 - 12x^2 - 42$ $Q(x) = x - 3$

в. $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ $Q(x) = x + 1$

г. $P(x) = 24x^4 - 2x^2 + 3x - 1$ $Q(x) = x - 2$

д. $P(x) = x^7 - 3x^5 + x^4 - 2x^3 + x + 4$ $Q(x) = x - 1$

е. $P(x) = x^4 + x^3 + x + 1$ $Q(x) = x^3 + x + 1$

ё. $P(x) = 2x^4 - 10x^3 + 23x^2 - 22x - 3$ $Q(x) = x^3 - 3x + 5$

ж. $P(x) = x^7 - 3x^5 + x^4 - 2x^3 + x + 4$ $Q(x) = x - 1$

з. $P(x) = x^5 - 6x^3 + 2x^2 - 4$ $Q(x) = x^2 - x + 1$

и. $P(x) = x^5 - 6x^3 + 2x^2 - 4$ $Q(x) = x^2 - x + 1$

Дасгал 2. A тоо бүхэл байх a тооны утгыг ол.

а. $A = (2a^2 - 3a - 2):(a - 2)$ б. $A = (3a^2 + a - 2):(a + 1)$

в. $A = (2a^2 - 3a + 3):(2a + 1)$ г. $A = (3a^2 + a + 5):(3a - 2)$

д. $A = (6a^3 - a^2 + 2a + 1):(3a + 1)$ е. $A = (5a^3 - 2a^2 + 5a - 2):(5a - 2)$

ё. $A = (6a^2 + 7a - 5):(2a + 3)$ и. $A = (10a^2 + a + 4):(2a + 1)$

й. $A = (6a^3 - 7a^2 + 3):(3a + 1)$ к. $A = (4a^3 - 5a^2 + 6a + 16):(4a + 3)$

Дасгал 3. Үржигдэхүүн болгон задал.

а. $2x^3 - 21x^2 + 37x + 24$ б. $5x^3 - 46x^2 + 79x - 14$

в. $x^4 - x^3 - 7x^2 + 13x - 6$ г. $2x^3 - 3x^2 + 5x - 14$

д. $x^3 - 3x^2 + 2x + 6$ е. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

ё. $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 2$ ж. $x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 6x - 8$

з. $x^4 - 15x^2 - 10x + 24$

Дасгал 4. Тэгшитгэл бод.

а. $3x^3 - 12x = 0$ б. $49x^3 + 14x^2 + x = 0$ в. $x^3 - 5x^2 - x + 5 = 0$

г. $x^3 - 7x + 6 = 0$ д. $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$ е. $x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$

ё. $x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0$ ж. $x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0$

з. $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$ и. $x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0$

й. $x^3 + 2x^2 - 36x - 72 = 0$ к. $x^3 - 4x^2 + 3x + 2 = 0$

Дасгал 5. Тэгшитгэл бод.

а. $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$ б. $6x^4 + 7x^3 - 36x^2 - 7x + 6 = 0$

в. $5x^4 - 3x^3 - 4x^2 - 3x + 5 = 0$ г. $x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6 = 0$

д. $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$ е. $5x^4 - 36x^3 + 62x^2 - 36x + 5 = 0$

ё. $x^4 + 9x^3 + 15x^2 + 2x = 0$ ж. $2x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 2 = 0$

з. $3x^4 + 2x^3 + 7x^2 + 2x + 3 = 0$ и. $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$

й. $x^4 - x^3 - 18x^2 + 16x + 32 = 0$ к. $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = 0$

л. $x^5 + 4x^4 - 3x^3 - 12x^2 - 4x - 16 = 0$ л. $x^5 - 3x^4 - 4x^3 + 12x^2 + 3x - 9 = 0$

2.6. Алгебрын рационал бутархайг олон гишүүнт хялбар рационал бутархайн нийлбэр болгон задлах

Бид $\frac{3}{x+2}, \frac{5}{x-1}$ гэсэн хоёр алгебрын рационал бутархай өгсөн үед тэдгээрийн нийлбэрийг

$$\begin{aligned} \frac{3}{x+2} + \frac{5}{x-1} &= \frac{3(x-1)}{(x+2)(x-1)} + \frac{5(x+2)}{(x-1)(x+2)} = \\ &= \frac{3x-3}{(x+2)(x-1)} + \frac{5x+10}{(x-1)(x+2)} = \frac{8x+7}{(x+2)(x-1)} \end{aligned}$$

гэж олж чадна.

Харин одоо $\frac{8x+7}{(x+2)(x-1)}$ рационал бутархайг хоёр алгебрын хялбар рационал бутархайн нийлбэр болгон задлах тухай авч үзнэ.

Тодорхойлолт. k натурал тоо, $\frac{A}{(ax+b)^k}, \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}$ (энд $b^2 - 4ac < 0$) хэлбэрийн

илэрхийллийг алгебрын хялбар рационал бутархай гэдэг. Энд A, B, a, b, c нь бодит тоо, x нь хувьсагч юм.

$\frac{8x+7}{(x+2)(x-1)}$ илэрхийллийг $\frac{8x}{(x+2)(x-1)} + \frac{7}{(x+2)(x-1)}$ гэсэн нийлбэр болгон задалж болох боловч $\frac{8x}{(x+2)(x-1)}$ ба $\frac{7}{(x+2)(x-1)}$ нь алгебрын хялбар рационал бутархай биш юм.

Дасгал.

1. Алгебрын хялбар рационал бутархай мөн эсэхийг тогтоо.

- а) $\frac{6}{3x+1}$ б) $\frac{5x}{2x+3}$ в) $\frac{x^2+2x+5}{3x+4}$ г) $\frac{11}{(x-1)^2}$ д) $\frac{2x^2+3x+1}{(x+6)^2}$
 е) $\frac{27}{x^2-4x+4}$ ё) $\frac{11-3x}{(4x+2)^2}$ ж) $\frac{17}{4x^2+3}$ з) $\frac{x^4}{(x+1)^2}$ и) $\frac{2^4}{(4x-1)^2}$
 й) $\frac{3x+1}{4x^2+3}$ к) $\frac{13}{4x^2-3}$

2. Илэрхийллийг хялбарчил.

- а) $\frac{6x}{3x-1} - \frac{2x}{x+1}$ б) $\frac{5x}{x+1} + \frac{x+1}{2x+1}$ в) $\frac{5}{x-2} - \frac{3x}{x+1}$
 г) $\frac{1}{(x-1)(x+4)} + \frac{1}{(x-1)}$ д) $\frac{x+5}{x+3} + \frac{2}{x^2+3x}$ е) $\frac{5}{x-2} - \frac{x+10}{x^2-4}$
 ё) $\frac{11-3x}{x^2+2x-3} - \frac{2}{x-1}$ ж) $\frac{11x+27}{2x^2+8x-10} - \frac{2}{x-1}$

3. Илэрхийллийг хялбарчил.

- а) $\frac{4x+6}{x-1} \cdot \frac{2x}{2x+3}$ б) $\frac{x^2-9}{x^2-4x+4} \cdot \frac{x-2}{x+3}$
 в) $\frac{x^2+5x-6}{x^2-5x+4} \cdot \frac{x^2+9x+18}{x^2-x-12}$ г) $\frac{-2x^2+7x-6}{8x^2-10x+3} \cdot \frac{2x+x^2-15}{5-19x-4x^2}$

4. Хэрэв $a = \frac{1}{x-2}$, $b = \frac{x-1}{x-6}$ бол дараах илэрхийллийг хялбарчил.

- а) $a + b$ б) $xa - 2b$ в) $(x-3)a - 2b$ г) $xa + 7b$

5. Илэрхийллийг хялбарчил.

- а) $\frac{2}{x^3-3x^2+2x} + \frac{2}{x^3-6x^2+11x-6}$ б) $\frac{5}{3x-1} - \frac{4}{2x-1} + \frac{6x-1}{6x^2-5x+1}$

Хүртвэрийн зэрэг нь хуваарийн зэргээс бага байх алгебрын рационал бутархайг алгебрын хялбар рационал бутархайн нийлбэр болгон задлах тодорхой бус коэффициентийн аргыг авч үзье.

Жишээ 1. $\frac{8x+7}{(x+2)(x-1)}$ илэрхийллийг алгебрын хялбар рационал бутархайн нийлбэр болгон задал.

Бодолт.

(1) $\frac{8x+7}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1}$ задардаг гэж үзье. Одоо A, B коэффициент олъё.

(2) $\frac{8x+7}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x+2)}{(x+2)(x-1)}$ болно.

Эндээс $8x + 7 = A(x-1) + B(x+2)$ гэсэн адилтгал биелнэ. Төсөөтэй гишүүдийг эмхэтгэхэд $8x + 7 = (A+B)x + (-A+2B)$ болно.

(3) Хоёр олон гишүүнт тэнцүү байх нөхцөлөөр A, B нь

$$\begin{cases} A+B=8 \\ -A+2B=7 \end{cases}$$

тэгшитгэлийн системийн шийд болно.

(4) Уг тэгшитгэлийн системийг бодвол $A = 3, B = 5$ гэж олдоно.

Иймд өгсөн $\frac{8x+7}{(x+2)(x-1)}$ алгебрийн рационал бутархайг

$$\frac{8x+7}{(x+2)(x-1)} = \frac{3}{x+2} + \frac{5}{x-1}$$

гэсэн алгебрын хоёр хялбар рационал бутархайн нийлбэр болгон задаллаа.

Энэ жишээнд A, B коэффициентыг олоход хоёр олон гишүүнт тэнцүү байх нөхцөлийг шууд ашигласан. Зарим тохиолдолд тооцоолол хялбар болгохын тулд x хувьсагчад утга орлуулах замаар A, B коэффициентийг олж болдог.

Жишээ 2. $\frac{15x+2}{2x^2+x-6}$ илэрхийллийг алгебрын хялбар рационал бутархайн нийлбэр болгон задал.

Бодолт. Хуваарийг үржигдэхүүн болгон задалъя. $2x^2 + x - 6 = (x + 2)(2x - 3)$

$\frac{15x+2}{(x+2)(2x-3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{2x-3}$ гэсэн алгебрын хялбар рационал бутархайн нийлбэр болгон задалсан гэе. A, B коэффициентийг олъё.

$$\frac{15x+2}{(x+2)(2x-3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{2x-3} = \frac{A(2x-3) + B(x+2)}{(x+2)(2x-3)}$$

болно. Эндээс

$$15x + 2 = A(2x - 3) + B(x + 2)$$

гэсэн адилтгал биелэх болно.

$x = -2$ үед $-30 + 2 = A(-4 - 3) + B(-2 + 2)$ болох ба эндээс $A = 4$ гэж гарна.

$x = \frac{3}{2}$ үед $\frac{45}{2} + 2 = A(3 - 3) + B\left(\frac{3}{2} + 2\right)$ болох ба эндээс $B = 7$ гэж гарна.

Иймд $\frac{15x+2}{(x+2)(2x-3)} = \frac{4}{x+2} + \frac{7}{2x-3}$.

Хүртвэрийн зэрэг нь хуваарийн зэргээс бага байдаг алгебрын рационал бутархайг алгебрын хялбар рационал бутархайн нийлбэр болгон задлах тухай авч үзье.

Хэрэв алгебрын рационал бутархайн хуваарь нь

$(px + q)(rx + s), (px + q)(rx + s)(tx + n)$ гэсэн үржигдэхүүн болон задарсан бол

(i) $\frac{ax+b}{(px+q)(rx+s)}$ хэлбэрийн илэрхийллийг $\frac{A}{px+q} + \frac{B}{rx+s}$ гэсэн нийлбэр болгон задална.

(ii) $\frac{ax^2+bx+c}{(px+q)(rx+s)(tx+n)}$ хэлбэрийн илэрхийллийг $\frac{A}{px+q} + \frac{B}{rx+s} + \frac{C}{tx+n}$ гэсэн нийлбэр болгон задална.

Жишээ 3. $\frac{3x^2+19x-32}{(x-1)(x-2)(x+4)}$ бутархайг алгебрын хялбар рационал бутархайн нийлбэр болгон задал.

Бодолт. Хуваарь нь $(x - 1)(x - 2)(x + 4)$ гэсэн шугаман үржигдэхүүнд задрах тул

$$\frac{3x^2 + 19x - 32}{(x - 1)(x - 2)(x + 4)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x + 4}$$

гэсэн алгебрын хялбар рационал бутархайн нийлбэр болно. A, B, C коэффициентийг олъё.

$$\frac{3x^2 + 19x - 32}{(x-1)(x-2)(x+4)} = \frac{A(x-2)(x+4) + B(x-1)(x+4) + C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x+4)}$$

болно. Иймд

$$3x^2 + 19x - 32 = A(x-2)(x+4) + B(x-1)(x+4) + C(x-1)(x-2)$$

адилтгал биелнэ. Эндээс

$$3x^2 + 19x - 32 = Ax^2 + 2Ax - 8A + Bx^2 + 3Bx - 4B + Cx^2 - 3Cx + 2C$$

болох ба төсөөтэй гишүүдийг эмхэтгэхэд

$$3x^2 + 19x - 32 = (A + B + C)x^2 + (2A + 3B - 3C)x + (-8A - 4B + 2C)$$

гарна. Хоёр олон гишүүнт тэнцүү байх нөхцөл ёсоор A, B, C нь

$$\begin{cases} A + B + C = 3 \\ 2A + 3B - 3C = 19 \\ -8A - 4B + 2C = -32 \end{cases}$$

тэгшитгэлийн системийн шийд болно. Энэ системийг бодвол $A = 2, B = 3, C = -2$ гэж олдох тул

$$\frac{3x^2 + 19x - 32}{(x-1)(x-2)(x+4)} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-2} + \frac{-2}{x+4}$$

гэж задарна.

Хэрэв алгебрын рационал бутархайн хуваарийг $(px+q)^2, (px+q)^3$ гэсэн үржигдэхүүн болгон задалсан бол

(iii) $\frac{ax+b}{(px+q)^2}$ хэлбэрийн илэрхийллийг $\frac{A}{px+q} + \frac{B}{(px+q)^2}$ гэсэн нийлбэр болгон задална.

(iv) $\frac{ax^2+bx+c}{(px+q)^3}$ хэлбэрийн илэрхийллийг $\frac{A}{px+q} + \frac{B}{(px+q)^2} + \frac{C}{(px+q)^3}$ гэсэн нийлбэр болгон задална.

Жишээ 4. $\frac{9x+2}{(x+1)^2}$ илэрхийллийг алгебрын хялбар рационал бутархайн нийлбэр болгон задал.

Бодолт. Хуваарь нь $(x+1)^2$ тул

$$\frac{9x+2}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2}$$

гэсэн алгебрын рационал бутархайн нийлбэр болно. A, B коэффициентийг олъё.

$$\frac{9x+2}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1) + B}{(x+1)^2}$$

буюу

$$9x+2 = A(x+1) + B$$

болно. Эндээс

$$9x + 2 = Ax + A + B$$

гэсэн адилтгал биелнэ. Хоёр олон гишүүнт тэнцүү байх нөхцөл ёсоор $\begin{cases} A = 9 \\ A + B = 2 \end{cases}$

тэгшитгэлийн систем үүсэх ба эндээс $A = 9, B = -7$ гэж олдоно. Иймд

$$\frac{9x + 2}{(x + 1)^2} = \frac{9}{x + 1} + \frac{-7}{(x + 1)^2} = \frac{9}{x + 1} - \frac{7}{(x + 1)^2}$$

гэж задарна.

Хэрэв алгебрын рационал бутархайн хуваарь нь $(px + q)(rx + s)^2$ гэсэн үржигдэхүүн болон задарсан бол

(v) $\frac{ax^2 + bx + c}{(px + q)(rx + s)^2}$ хэлбэрийн илэрхийллийг $\frac{A}{px + q} + \frac{B}{rx + s} + \frac{C}{(rx + s)^2}$ гэсэн нийлбэр болгон задална.

Жишээ 5. $\frac{5x^2 + 11x + 2}{x(x + 1)^2}$ илэрхийллийг алгебрын хялбар рационал бутархайн нийлбэр болгон задал.

Бодолт. Хуваарь нь $x(x + 1)^2$ тул

$$\frac{5x^2 + 11x + 2}{x(x + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{(x + 1)^2}$$

гэсэн алгебрын рационал бутархайн нийлбэрт задарна. A, B, C коэффициентийг олж.

$$\frac{5x^2 + 11x + 2}{x(x + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{(x + 1)^2} = \frac{A(x + 1)^2 + Bx(x + 1) + Cx}{x(x + 1)^2}$$

болох ба эндээс

$$5x^2 + 11x + 2 = A(x + 1)^2 + Bx(x + 1) + Cx$$

гэсэн адилтгал биелнэ. Эндээс

$$5x^2 + 11x + 2 = (A + B)x^2 + (2A + B + C)x + C$$

болох бөгөөд хоёр олон гишүүнт тэнцүү байх нөхцөл ёсоор A, B, C нь

$$\begin{cases} A + B = 5 \\ 2A + B + C = 11 \\ C = 2 \end{cases}$$

тэгшитгэлийн системийн шийд байна. Энэ системийг бодвол $A = 4, B = 1, C = 2$ гэж гарах ба

$$\frac{5x^2 + 11x + 2}{x(x + 1)^2} = \frac{4}{x} + \frac{1}{x + 1} + \frac{2}{(x + 1)^2}$$

болно.

Хэрэв алгебрын рационал бутархайн хуваарийг $(px + q)(rx^2 + s)$ гэсэн үржигдэхүүн болгон

задалсан ба $(rx^2 + s)$ нь үржигдэхүүн болон задрахгүй бол

(vi) $\frac{ax^2+bx+c}{(px+q)(rx^2+s)}$ хэлбэрийн илэрхийллийг $\frac{A}{px+q} + \frac{Bx+C}{rx^2+s}$ гэсэн нийлбэр болгон задална.

Жишээ 6. $\frac{4}{(2x-1)(x^2+4)}$ илэрхийллийг алгебрын хялбар рационал бутархайн нийлбэр болгон задал.

Бодолт. Хуваарь нь $(2x - 1)(x^2 + 4)$ гэсэн үржвэр тул

$$\frac{4}{(2x - 1)(x^2 + 4)} = \frac{A}{2x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$$

гэсэн алгебрын рационал бутархайн нийлбэр болгон задална. A, B, C коэффициентийг олъё.

$$\frac{4}{(2x - 1)(x^2 + 4)} = \frac{A(x^2 + 4) + (Bx + C)(2x - 1)}{2x - 1}$$

буюу

$$4 = A(x^2 + 4) + (Bx + C)(2x - 1)$$

болно. Эндээс

$$4 = Ax^2 + 4A + 2Bx^2 - Bx + 2Cx - C$$

болох бөгөөд төсөөтэй гишүүдийг эмхэтгэхэд

$$4 = (A + 2B)x^2 + (-B + 2C)x + (4A - C)$$

болно. Эндээс хоёр олон гишүүнт тэнцүү тул A, B, C нь

$$\begin{cases} A + 2B = 0 \\ -B + 2C = 0 \\ 4A - C = 4 \end{cases}$$

тэгшитгэлийн системийн шийд болно. Энэ системийг бодвол $A = \frac{16}{17}, B = -\frac{8}{17}, C = -\frac{4}{17}$ гэж гарах ба

$$\frac{4}{(2x - 1)(x^2 + 4)} = \frac{16}{17} \frac{1}{2x - 1} + \frac{-\frac{8}{17}x - \frac{4}{17}}{x^2 + 4} = \frac{16}{17(2x - 1)} - \frac{8x + 4}{17(x^2 + 4)}$$

болно.

6. Дараах рационал илэрхийллийг тодорхой бус коэффициентийн аргаар алгебрын хялбар рационал бутархайн нийлбэр болгон задал.

а) $\frac{4}{(x+2)(x-2)}$	б) $\frac{6}{(x-2)(x+1)}$	в) $\frac{x}{(x-3)(2x+1)}$	г) $\frac{8}{(2x-1)(x+2)}$
д) $\frac{7x-23}{(x-2)(x-5)}$	е) $\frac{29-3x}{(x-3)(x+2)}$	ё) $\frac{4x+12}{x^2-3x}$	ж) $\frac{4x+12}{4x^2-9}$
з) $\frac{-x+13}{x^2-x-6}$	и) $\frac{-2x+23}{x^2-3x-4}$	й) $\frac{10x}{2x^2-3x+1}$	к) $\frac{x+11}{2x^2-x-10}$

7. Дараах рационал илэрхийллийг тодорхой бус коэффициентийн аргаар алгебрын хялбар рационал бутархайн нийлбэр болгон задал.

а) $\frac{3x}{(x+4)^2}$	б) $\frac{5x}{(x-2)^2}$	в) $\frac{3x-4}{(x-5)^2}$	г) $\frac{x+1}{3(x-2)^2}$
-------------------------	-------------------------	---------------------------	---------------------------

- д) $\frac{15x+16}{(3x+4)^2}$ е) $\frac{x-1}{x^2+4x+4}$ ё) $\frac{4x+1}{16x^2-8x+1}$ ж) $\frac{4x+12}{4x^2+12x+9}$
8. Дараах рационал илэрхийллийг тодорхой бус коэффициентийн аргаар алгебрын хялбар рационал бутархайн нийлбэр болгон задал.
- а) $\frac{1}{x(x+1)(x+2)}$ б) $\frac{x+10}{(x-3)(x-2)(x+1)}$ в) $\frac{9x^2-10x+1}{(x-3)(x-2)(x+1)}$ г) $\frac{5x^2+2x+1}{x^3-4x}$
- д) $\frac{x^2+x-30}{x^3-x^2-9x+9}$ е) $\frac{2x+1}{x^3-2x^2-5x+6}$ ё) $\frac{2x}{6x^3+5x^2-2x-1}$ ж) $\frac{4x+12}{x^3+x^2-30x}$
9. Дараах рационал илэрхийллийг тодорхой бус коэффициентийн аргаар алгебрын хялбар рационал бутархайн нийлбэр болгон задал.
- а) $\frac{x^2+x+1}{x^2(x+1)}$ б) $\frac{x-3}{(x+2)^2x}$ в) $\frac{x-3}{(x+2)^2(x-1)}$ г) $\frac{x^2+7x+12}{(x-3)^2(x+2)}$
- д) $\frac{5}{x^3+4x^2-3x-18}$ е) $\frac{2x+1}{x^3-5x^2+8x-4}$ ё) $\frac{12x^2+x+12}{-16x^3+40x^2-33x+9}$ ж) $\frac{-4x^2+18x-7}{12x^3-32x^2+15x+9}$
10. Дараах илэрхийллийг алгебрын хялбар рационал бутархайн нийлбэр болгон задал.
- а) $\frac{x+1}{x(x^2+1)}$ б) $\frac{4x^2-4x-3}{(x-2)(x^2+1)}$ в) $\frac{14x^2+3x+18}{(3x^2+4)(x-1)}$ г) $\frac{-18x^2-8x-7}{(5x^2+1)(3x+2)}$
- д) $\frac{1}{4x^3-2x^2+2x-1}$ е) $\frac{x^2-x+1}{x^3+x^2+x+1}$ ё) $\frac{34x^2+3x-25}{32x^3-112x^2+10x-35}$ ж) $\frac{2x^2+31x+44}{18x^3-4x^2+45x-10}$

Хүртвэрийн зэрэг нь хуваарийн зэргээс бага байх алгебрын рационал бутархайг алгебрын хялбар рационал бутархайн нийлбэр болгон задлах тохиолдолуудыг авч үзлээ. Одоо хүртвэрийн зэрэг нь хуваарийн зэргээс багагүй байх алгебрын рационал бутархайг олон гишүүнт болон алгебрын хялбар рационал бутархайн нийлбэр болгон задлах аргыг авч үзэх болно.

Жишээ 7. $\frac{x^4+x+1}{x^2(x-1)}$ илэрхийллийг олон гишүүнт алгебрын хялбар рационал бутархайн нийлбэр болгон задал.

Бодолт.

- (1) $\frac{x^4+x+1}{x^2(x-1)}$ илэрхийллийн хүртвэрийн зэрэг нь хуваарийн зэргээс их тул $x^4 + x + 1$ олон гишүүнтийг $x^2(x-1)$ хуваая. Тэгвэл $x^4 + x + 1$ -ийг $x^3 - x^2$ олон гишүүнтэд хуваахад $(x+1)$ ногдож, үлдэгдэл $x^2 + x + 1$ гарна. Эндээс
- $$x^4 + x + 1 = (x^3 - x^2)(x + 1) + x^2 + x + 1$$

гэж бичиж болох ба

$$\frac{x^4 + x + 1}{x^2(x-1)} = \frac{(x^3 - x^2)(x + 1) + x^2 + x + 1}{x^3 - x^2} = (x + 1) + \frac{x^2 + x + 1}{x^3 - x^2}$$

болно. Иймд $\frac{x^4+x+1}{x^2(x-1)}$ бутархайг $(x+1)$ олон гишүүнт ба $\frac{x^2+x+1}{x^3-x^2}$ алгебрын рационал

бутархайн нийлбэр болгон задаллаа.

- (2) $\frac{x^2+x+1}{x^3-x^2}$ бутархайг алгебрын хялбар рационал бутархайн нийлбэр болгон задлая.

Хуваарь нь $x^2(x-1)$ гэж задрах тул $\frac{x^2+x+1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}$ гэсэн алгебрын хялбар рационал бутархайн нийлбэр болон задална. A, B, C тоо $A = -2, B = -1, C = 3$ гэж олдоно. Эндээс

$$\frac{x^2 + x + 1}{x^2(x-1)} = \frac{-2}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{3}{x-1}$$

болно. Иймд

$$\frac{x^4 + x + 1}{x^2(x-1)} = (x+1) + \frac{x^2 + x + 1}{x^3 - x^2} = (x+1) + \frac{-2}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{3}{x-1}$$

гэж задаллаа.

Жишээ 8. $\frac{2x^3+2x^2+2x+2}{2x^3-7x^2+4x+4}$ илэрхийллийг олон гишүүнт ба алгебрын хялбар рационал бутархайн нийлбэр болгон задал.

Бодолт. $\frac{2x^3+2x^2+2x+2}{2x^3-7x^2+4x+4}$ илэрхийллийн хүртвэрийн зэрэг нь хуваарийн зэрэгтэй тэнцүү тул $2x^3 + 2x^2 + 2x + 2$ олон гишүүнтийг $2x^3 - 7x^2 + 4x + 4$ олон гишүүнтэд хуваая. Тэгвэл $2x^3 + 2x^2 + 2x + 2$ -ийг $2x^3 - 7x^2 + 4x + 4$ олон гишүүнтэд хуваахад 1 ногдож, үлдэгдэл $9x^2 - 2x - 2$ гарна. Эндээс

$$\frac{2x^3 + 2x^2 + 2x + 2}{2x^3 - 7x^2 + 4x + 4} = 1 + \frac{9x^2 - 2x - 2}{2x^3 - 7x^2 + 4x + 4}$$

болно. Иймд $\frac{x^3+x^2+x+1}{2x^3-7x^2+4x+4}$ илэрхийллийг 1 гэсэн тэг зэргийн олон гишүүнт болон $\frac{9x^2-2x-2}{2x^3-7x^2+4x+4}$ гэсэн алгебрын рационал бутархайн нийлбэр болгон задаллаа.

Одоо $\frac{9x^2-2x-2}{2x^3-7x^2+4x+4}$ илэрхийллийн хуваарийг $(2x+1)(x-2)^2$ гэж үржигдэхүүн болгон задлах тул

$$\frac{9x^2 - 2x - 2}{2x^3 - 7x^2 + 4x + 4} = \frac{9x^2 - 2x - 2}{(2x+1)(x-2)^2} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

гэсэн нийлбэр болгон задална.

$$9x^2 - 2x - 2 = A(x-2)^2 + B(2x+1)(x-2) + C(2x+1)$$

гэсэн адилтгал болно. Эндээс

$x = 2$ үед $9 \cdot 4 - 2 \cdot 2 - 2 = A \cdot 0^2 + B \cdot 1 \cdot 0 + C \cdot 5$ болох тул $C = 6$ гэж олдоно.

$x = -\frac{1}{2}$ үед $9 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 = A \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)^2 + B \cdot 0 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) + C \cdot 0$ болох тул $A = \frac{1}{5}$ гэж гарна.

$x = 1$ үед $9 \cdot 1 - 2 - 2 = A \cdot (-1)^2 + B \cdot 3 \cdot (-1) + C \cdot 3$ болох тул $B = \frac{22}{5}$ гэж олдоно.

Иймд

$$\frac{9x^2 - 2x - 2}{(2x+1)(x-2)^2} = \frac{1}{5(2x+1)} + \frac{22}{5(x-2)} + \frac{6}{(x-2)^2}$$

болно. Эндээс

$$\frac{x^3 + x^2 + x + 1}{2x^3 - 7x^2 + 4x + 4} = 1 + \frac{1}{5(2x+1)} + \frac{22}{5(x-2)} + \frac{6}{(x-2)^2}$$

болж олон гишүүнт болон алгебрын хялбар рационал бутархайн нийлбэр болгон задаллаа.

Дүгнэлт. $P(x)$, $Q(x)$ нь олон гишүүнт ба $P(x)$ -ийн зэрэг $Q(x)$ -ийн зэргээс багагүй байг.

Тэгвэл $\frac{P(x)}{Q(x)}$ -ийг олон гишүүн болон алгебрын хялбар рационал бутархайн нийлбэрт задалж болно. Хэрэв $P(x)$ -ийг $Q(x)$ -д хуваахад $S(x)$ ногдож, үлдэгдэл $R(x)$ гардаг бол

Олон
гишүүнт

Алгебрын рационал
бутархай

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

болно.

11. $\frac{x^3-4}{x^2-4} = S(x) + \frac{4(x-1)}{x^2-4}$ байх $S(x)$ олон гишүүнтийг хэрхэн олж болох вэ?
12. $\frac{x^4+x^2+1}{x^2-x-6} = x^2 + x + 8 + \frac{R(x)}{x^2-x-6}$ байх $R(x)$ олон гишүүнтийг хэрхэн олж болох вэ?
13. $\frac{x^4-5x^3-7x^2+48x-53}{(x-2)(x-5)} = S(x) + \frac{ax+b}{(x-2)(x-5)}$ байх $S(x)$ олон гишүүнт ба a, b тоог ол.
14. $\frac{3x^4+4x^3+5x^2}{x^3-2x^2-5x+6} = S(x) + \frac{ax^2+bx+c}{x^3-2x^2-5x+6}$ байх $S(x)$ олон гишүүнт ба a, b, c тоог ол.
15. Дараах илэрхийллийг олон гишүүнт болон алгебрын хялбар рационал бутархайн нийлбэр болгон задал.

а) $\frac{2x^3+x^2-31x-5}{x^2-3x-4}$

б) $\frac{6x^4-5x^3-25x^2+9x-9}{2x^2-x-10}$

в) $\frac{-x^4+6x^3+45x^2-186x-210}{x^3+x^2-30x}$

г) $\frac{2x^2-17x+46}{(x-5)^2}$

д) $\frac{4x^3+8x^2+x+3}{4x^2+12x+9}$

е) $\frac{2x^4-9x^3+25x^2-92x+136}{2(x-3)(x-2)(x+1)}$

ё) $\frac{3x^3-10x^2+11x-14}{2(x-3)^2(x+2)}$

ж) $\frac{x^4-3x^3+x^2-2x+1}{x(x^2+1)}$

з) $\frac{7x^3-35x^2+66x-23}{5(x^3-5x^2+8x-4)}$

и) $\frac{2x^4-x^3-25x^2+12x+102}{x^3+4x^2-3x-18}$

й) $\frac{45x^3+33x^2+20x+6}{(5x^2+1)(3x+2)}$

к) $\frac{12x^4+2x^3+2x^2+x}{8x^3-4x^2+4x-2}$

16. $\frac{1}{x(x+1)}$ илэрхийллийг алгебрын хялбар рационал бутархайн нийлбэр болгон задалж, түүнийг ашиглан $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$ нийлбэр ол.

17. $\frac{1}{x(x+2)}$ илэрхийллийг алгебрын хялбар рационал бутархайн нийлбэр болгон задалж, түүнийг ашиглан дараах нийлбэрийг ол.

а) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ б) $\frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 8} + \dots + \frac{1}{2n(2n+2)}$

18. $\frac{x^3+x^2+1}{x(x+1)}$ илэрхийллийг олон гишүүнт болон алгебрын хялбар рационал

бутархайн нийлбэр болгон задалж, түүнийг ашиглан дараах нийлбэрийг ол.

$$\frac{1^3 + 1^2 + 1}{1 \cdot 2} + \frac{2^3 + 2^2 + 1}{2 \cdot 3} + \frac{3^3 + 3^2 + 1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{n^3 + n^2 + 1}{n(n+1)}$$

19. $\frac{5x^2+10x+2}{x(x+2)}$ илэрхийллийг олон гишүүнт болон алгебрын хялбар рационал бутархайн нийлбэрт задал, түүнийг ашиглан дараах нийлбэрийг ол.

а) $\frac{5 \cdot 2^2 - 3}{1 \cdot 3} + \frac{5 \cdot 4^2 - 3}{3 \cdot 5} + \frac{5 \cdot 6^2 - 3}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{5 \cdot (2n)^2 - 3}{(2n-1)(2n+1)}$

$$\begin{aligned} \text{б)} & \frac{5 \cdot 3^2 - 3}{2 \cdot 4} + \frac{5 \cdot 5^2 - 3}{4 \cdot 6} + \frac{5 \cdot 7^2 - 3}{6 \cdot 8} + \dots + \frac{5 \cdot (2n+1)^2 - 3}{2n(2n+2)} \\ \text{в)} & \frac{5 \cdot 2^2 - 3}{1 \cdot 3} + \frac{5 \cdot 3^2 - 3}{2 \cdot 4} + \frac{5 \cdot 4^2 - 3}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{5 \cdot (n+1)^2 - 3}{n(n+2)} \end{aligned}$$

Бүлгийн нэмэлт даалгавар

- Хэрэв $\frac{x^5+x^4+5x^3+15x+4}{(x^2-1)^2} = ax + b + \frac{R(x)}{(x^2-1)^2}$ ба $R(x)$ нь гурваас ихгүй зэргийн олон гишүүнт бол а) a, b тоонуудыг ол. б) $R(x)$ -ийг ол.
- в) $\frac{R(x)}{(x^2-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2}$ бол A, B, C, D тоонуудыг ол.
- $\frac{x^4+2x^3+3x^2+4x+5}{x^2+x-2} = ax^2 + bx + c + \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$ бол a, b, c, A, B тоонуудыг ол.
- Дараах илэрхийллийг олон гишүүнт болон хялбар рационал бутархайн нийлбэрт задал.
 - $\frac{x^5+3}{x^2-1}$
 - $\frac{x^4}{x^2-4x+4}$
 - $\frac{x^4-x^2+5}{x^3-1}$
 - $\frac{x^4-2x^3-4x^2+x+13}{x^2-x-6}$
- $\frac{2x^4+5}{Q(x)} = c + \frac{ax+b}{x^2+x+1} + \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2}$ бол a, b, c, A, B тоонуудыг ол.

Хариу

1. а) мөн, б) биш, в) биш, г) мөн, д) биш, е) мөн, ё) биш, ж) мөн, з) биш, и) мөн, й) мөн, к) биш. 2. а) $\frac{8x}{(3x-1)(x+1)}$, б) $\frac{11x^2+7x+1}{(x+1)(2x+1)}$, в) $\frac{-3x^2+11x+5}{(x-2)(x+1)}$, г) $\frac{2x+7}{(x-1)(x+4)}$, д) $\frac{x^2+5x+2}{x(x+3)}$, е) $\frac{4x}{x^2-4}$, ё) $\frac{-5}{x-3}$, ж) $\frac{7(x+1)}{2x^2+8x-10}$. 3. а) $\frac{4x}{x-1}$ б) $\frac{x-3}{x-2}$ в) 1 г) 5. а) $\frac{4x-6}{x(x-1)(x-2)(x-3)}$ б) $\frac{2}{(3x-1)}$

6. а) $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}$, б) $\frac{3}{2(x-3)} - \frac{3}{2(x+1)}$, в) $\frac{3}{7(x-3)} + \frac{1}{7(2x+1)}$, г) $\frac{16}{5(2x-1)} - \frac{8}{5(x+2)}$, д) $\frac{3}{x-2} + \frac{4}{x-5}$, е) $\frac{4}{x-3} - \frac{7}{x+2}$, ё) $-\frac{4}{3} + \frac{8}{x-3}$, ж) $\frac{3}{2x-3} - \frac{1}{2x+3}$, з) $\frac{-3}{x+2} + \frac{2}{x-3}$, и) $\frac{3}{x-4} - \frac{5}{x+1}$, й) $-\frac{10}{2x-1} + \frac{10}{x-1}$, к) $\frac{3}{2x-5} - \frac{1}{x+2}$. 7. а) $\frac{x+4}{3} - \frac{(x+4)^2}{(x+4)^2}$, б) $\frac{5}{x-2} + \frac{10}{(x-2)^2}$, в) $\frac{3}{(x-5)} + \frac{11}{(x-5)^2}$, г) $\frac{1}{3(x-2)} + \frac{1}{(x-2)^2}$, д) $\frac{3x+4}{3x+4} - \frac{4}{(3x+4)^2}$, е) $\frac{1}{(x-2)} - \frac{3}{(x-2)^2}$, ё) $\frac{1}{(4x-1)} + \frac{2}{(4x-1)^2}$, ж) $\frac{2}{2x+3} + \frac{6}{(2x+3)^2}$. 8. а) $\frac{1}{2x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+2)}$, б) $\frac{13}{4(x-3)} - \frac{4}{x-2} + \frac{3}{4(x+1)}$, в) $\frac{13}{x-3} - \frac{17}{3(x-2)} + \frac{5}{3(x+1)}$, г) $-\frac{1}{4x} + \frac{25}{8(x-2)} + \frac{17}{8(x+2)}$, д) $\frac{7}{2(x-1)} - \frac{3}{2(x-3)} - \frac{1}{(x+3)}$, е) $-\frac{1}{5(x-2)} - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{7}{10(x-3)}$, ё) $-\frac{1}{3(x+1)} + \frac{3}{5(3x+1)} + \frac{4}{15(2x-1)}$, ж) $-\frac{2}{5x} - \frac{2}{11(x+6)} + \frac{32}{55(x-5)}$. 9. а) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1}$, б) $\frac{5}{2(x+2)^2} + \frac{4(x+2)}{4x} - \frac{3}{3(x+2)^2} + \frac{9(x+2)}{9(x+2)} - \frac{9(x-1)}{9(x-1)}$, г) $\frac{5(x-3)^2}{42} + \frac{25(x-3)}{23} - \frac{25(x+2)}{2}$, д) $-\frac{1}{(x+3)^2} - \frac{1}{5(x+3)} + \frac{1}{5(x-2)}$, е) $\frac{5}{(x-2)^2} - \frac{3}{(x-2)} + \frac{3}{(x-1)}$, ё) $\frac{78}{(4x-3)^2} + \frac{97}{(4x-3)} - \frac{25}{(x-1)}$, ж) $\frac{2}{(2x-3)^2} - \frac{1}{(3x+1)}$.

10. а) $\frac{1}{x} - \frac{x-1}{x^2+1}$, б) $\frac{1}{(x-2)} + \frac{3x+2}{(x^2+1)}$, в) $\frac{5}{(x-1)} + \frac{-x+2}{(3x^2+4)}$, г) $\frac{-3}{(3x+2)} - \frac{x+2}{(5x^2+1)}$, д) $\frac{2}{3(2x-1)} - \frac{1+2x}{3(x^2+1)}$, е) $\frac{3}{2(x+1)} - \frac{x+1}{2(x^2+1)}$, ё) $\frac{2}{(2x-7)} + \frac{x+5}{(16x^2+5)}$, ж) $\frac{10}{(9x-2)} + \frac{-2x+3}{(2x^2+5)}$. 11. x 12. $14x + 49$

15. а) $2x + 7 + \frac{3}{x-4} - \frac{5}{x+1}$ б) $3x^2 - x + 2 + \frac{3}{2x-5} - \frac{1}{x+2}$ в) $-x + 7 + \frac{2}{x-5} - \frac{1}{x+6} + \frac{7}{x}$ г) $1 - \frac{7}{x-5} - \frac{14}{(x-5)^2}$ д) $x - 1 + \frac{2}{2x+3} + \frac{6}{(2x+3)^2}$ е) $x - \frac{1}{2} + \frac{11}{x+1} - \frac{x+2}{(x-2)} + \frac{1}{2(x-3)}$ ё) $\frac{3}{2} + \frac{1}{(x-3)^2} + \frac{1}{(x-3)} - \frac{2}{(x+2)}$ ж) $x - 3 + \frac{1}{x} + \frac{-x+1}{(x^2+1)}$ з) $\frac{7}{5} + \frac{5}{(x-2)^2} - \frac{3}{(x-2)} + \frac{3}{(x-1)}$ и) $2x - 9 - \frac{6}{(x+3)^2} + \frac{15}{(x+3)} + \frac{2}{(x-2)}$ й) $3 - \frac{2}{(3x+2)} + \frac{4x+1}{(5x^2+1)}$ к) $\frac{3}{2}x + 1 + \frac{2}{3(2x-1)} - \frac{1+2x}{3(2x^2+1)}$ 16. $\frac{n}{(n+1)}$ 17. а) $\frac{n}{(2n+1)}$ б) $\frac{n}{(4n+4)}$ 18.

$\frac{n(n^2+2n+2)}{2(n+1)}$ 19. а) $\frac{10n^2+7n}{2n+1}$ б) $\frac{10n^2+11n}{2n+2}$ в) $\frac{10n+3}{2} - \frac{2n+3}{n^2+3n+2}$